

1. Déterminer la nature de la série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^3 + \sqrt{n}}\right)$.

Corrigé

On pose $u_n = \frac{(-1)^n n}{n^3 + \sqrt{n}}$. On a alors : $|u_n| = \frac{n}{n^3 + \sqrt{n}} \sim \frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ puisque \sqrt{n} est négligeable devant n^3 .

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. On en déduit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc converge.

2. Déterminer la nature de la série $\left(\sum_{n \geq 3} \frac{2+2^n}{(\ln n)^n - n^2}\right)$.

Corrigé

On pose $u_n = \frac{2+2^n}{(\ln n)^n - n^2}$. On a alors $u_n \sim \frac{2^n}{(\ln n)^n}$ puisque n^2 est négligeable devant 3^n qui est inférieur à $(\ln n)^n$ pour n assez grand.

Maintenant, pour n assez grand, $\ln n \geq 4$ et $\frac{2^n}{(\ln n)^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge. On en déduit que $\sum u_n$ converge.

3. On considère la série $\left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que la série converge.

Corrigé

On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$. Comme $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont des fonctions croissantes et à valeurs positives sur $]1, +\infty[$, $t \mapsto t(\ln t)^2$ est croissante et à valeurs dans \mathbf{R}_+^* et donc f est décroissante. On en déduit, par comparaison série intégrale que pour tout $n \geq 3$

$$\int_3^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n f(t) dt.$$

Une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$. La partie de droite de l'inégalité ci-dessus devient alors

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles est bornée par $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}$, comme la série est à termes positifs, la série converge.

Bonus : Déterminer un équivalent du reste de la série de l'exercice précédent

Corrigé

On reprend le résultat de la comparaison série intégrale pour $3 \leq p \leq n$ pour encadrer $A =$

$$\sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

$$\frac{1}{\ln(p+1)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_{p+1}^{n+1} \leq A \leq \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_p^n \leq \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient un encadrement de $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$:

$$\frac{1}{\ln(p+1)} \leq R_p \leq \frac{1}{\ln p}.$$

Comme $\ln(p+1) = \ln(p) + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \ln(p) + o(\ln(p)) \sim \ln(p)$, on a $\frac{1}{\ln(p+1)} \sim \frac{1}{\ln(p)}$.

Par encadrement, $R_p \sim \frac{1}{\ln(p)}$.