Exercice I

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$.

1) Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

2) Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$ où C est une constante que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

3) Calculer C.

   On pourra admettre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout $X \in]0,1[$, $\ln(1+X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$.

Exercice II

On donne la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) *Deux cas particuliers.* Soit $\beta > 0$. Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,\beta])$ telle que $g(0) \neq 0$.

   a) Montrer que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx}\,g(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$
   Indication. Pour $t > 0$, on pourra construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, bornée, telle que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx}\,g(x)\,dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,g_t(u)\,du.$$

   b) Montrer de même que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx^2}\,g(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{g(0)}{\sqrt{t}}.$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) \neq 0$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$, on note
$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}\,f(x)\,dx.$$

Les deux cas étudiés à la question 1) correspondent à $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = x^2$ respectivement lorsque $a = 0$ et $b = d$.

2) *Cas où φ n'a pas de point critique dans $[a,b]$.* On suppose que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

   a) Montrer que $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$, et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

   b) Montrer que
   $$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\varphi'(a)t}.$$
   Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1.a) à l'aide d'un changement de variable.

3) *Cas où φ a un point critique en a.* On suppose maintenant que $\varphi \in \mathscr{C}^2([a,b])$, $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$, et $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b]$.

   a) Montrer que la formule $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Calculer $\psi'(a)$.

b) Montrer que ψ réalise une bijection de $[a, b]$ sur un intervalle de la forme $[0, \beta]$.

c) Montrer que

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\, \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1.b) à l'aide d'un changement de variable.

On admettra que le résultat se généralise de la façon suivante ;
Résultat 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^2(]0, +\infty[)$. on suppose qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On suppose de plus que $f(c) \neq 0$ et $\varphi''(c) > 0$. On suppose finalement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)}\, |f(x)|\, dx$ converge. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)}\, f(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}}\, \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}.$$

4) *Application.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$.

a) Montrer la convergence et calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On utilisera une récurrence.*

b) En déduire l'équivalent suivant

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}.$$

Indication. On réécrira d'abord $\Gamma(n + 1)$ sous la forme

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x-\ln x)}\, dx.$$