Partie I - Exemples

1) Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D = X^2 + 1$.
Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de D est vide. En particulier D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et D est $\mathbb{R}$-quasi-nilpotente.
Le spectre complexe de D est $\{i, -i\}$ et contient au moins un élément non nul donc D n'est pas $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.

2) Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = X^2 - \operatorname{tr}(B)X + \det(B) = X^2$.
Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. La matrice B est $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.

3) Soit $A \in T_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le cours la matrice A est nilpotente donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$ ce qui implique que A est quasi-nilpotente. Ceci montre que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent. De plus,

$$T_n^{++}(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}\{E_{i,j} \ : \ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

La famille étant libre comme sous-famille d'une famille libre, c'est une base et

$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

4) Notons que si $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top Y$ peut s'interpréter comme le produit scalaire $(X|Y)$ de X et Y vus comme éléments de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$X^\top AX = (X|AX) = (AX|X) = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = -X^\top AX$$

On en déduit donc que $X^\top AX = 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé (non nul) alors

$$0 = X^\top AX = \lambda \|X\|^2$$

et comme $X \neq 0$ (vecteur propre), $\lambda = 0$. Cela montre que 0 est donc la seule valeur propre réelle possible pour A. On a montré que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

5) Comme $n \geqslant 2$, on peut consdérer la matrice M définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\chi_M = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2+1)$$

et le spectre complexe de M est soit égal à $\{i, -i\}$ (cas $n = 2$) soit égal à $\{0, i, -i\}$ (cas $n \geqslant 3$). Si, par l'absurde, il existait une matrice P comme dans l'énoncé, M serait semblable dans $\mathbb{R}$ à un élément de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe. La similitude dans $\mathbb{R}$ entraînant immédiatement celle dans $\mathbb{C}$ ($GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.
Il n'existe donc pas de P comme dans l'énoncé.

Partie II - Lemme des colonnes

6) La seule matrice quasi-nilpotente de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$.

7) On remarque pour commencer que V' est un sous-espace vectoriel de V et donc $K(V')$ est un espace vectoriel comme image d'un espace vectoriel par une application linéaire.

   Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors $\chi_M = X \times \chi_{K(M)}$.

   Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si V' est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi.

8) D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $K(V')$ (sous-espace de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$), il existe un élément $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$. D'après l'hypothèse à réfuter, il existe une matrice M non nulle dans $C_j(V)$. Comme $j < n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in C_j(V)$, $K(M)$ a toutes ses colonnes nulles sauf peut-être la j-ème. Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc $K(M) = 0$.

   Comme la matrice M n'est pas nulle, elle a une unique colonne non nulle (celle de numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.

   Il existe donc $c \neq 0$ tel que $M = cE_{n,j}$. Enfin, V' est un sous-espace vectoriel donc $E_{n,j} = \frac{1}{c}M \in V' \subset V$.

9) L'endomorphisme u_σ transforme la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ qui est aussi une base. Cette application linéaire est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

   L'endomorphisme inverse $(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k. On a donc

$$(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$$

10) La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$ (en identifiant $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(i)}$. On a donc

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma$$

   On en déduit que P_σ est inversible et que

$$(P_\sigma)^{-1} = \operatorname{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

11) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Comme P_σ est la matrice de changement de base de (e_i) à $(e_{\sigma(i)})$, d'après la formule de changement de base,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = \operatorname{Mat}_{(e_{\sigma(i)})}(g)$$

   Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or,

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^{n} m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$

   Finalement,

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

12) On voit que V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P$. C'est donc un espace vectoriel.

   Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui de ceux des éléments de V^σ et V^σ est un sous-espace quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   Enfin, fixons $k \in [\![1, n]\!]$. D'après l'hypothèse à réfuter, on peut trouver une matrice M non nulle dans $C_{\sigma(k)}(V)$. On a en particulier $m_{l,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(k)$ ce que l'on peut écrire $m_{\sigma(l),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(k)$ ou encore si $c \neq k$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $C_k(V^\sigma)$. Elle est non nulle car M l'est (et $A \mapsto P_\sigma^{-1} A P$ est un isomorphisme). On a montré que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$$

13) On voit que V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$). Pour tout σ, on peut donc appliquer la question 8) à V^σ et dire qu'il existe $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$ ou encore que $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.
D'après la question 11), pour tout choix de σ on a $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i),\sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$ et $\sigma(j) = v$).
En appliquant ceci avec σ^{-1}, on a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.
Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. Appliquons ceci avec σ la bijection qui se contente de permuter j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). On trouve alors $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On a bien sûr $\sigma(k) \neq j$ car $k \neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j.
On a prouvé que

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \exists f(j) \neq j / \ E_{j,f(j)} \in V$$

14) Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k /\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $[\![1,n]\!]$ et donc fini. Or, $\mathbb{N}^*$ est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de i_a et en itérant successivement par f, on finit par retomber sur i_a. On regarde la première fois où on retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout j. On trouve des indices $i_a, i_{a+1}, \dots, i_{a+p-1}$ avec $p \geqslant 2$ deux à deux distincts images succesifs les uns des autres par f et avec $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$.
En posant $j_1 = i_a$, $j_2 = i_{a+1}$, ..., $j_p = i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et

$$\forall k \in [\![1,p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1$$

Ce résultat est appelé "lemme de la poêle à frire", les premiers termes $i_1, f(i_1), \dots$ formant la queue de la poële et les termes suivants le tour du corps de la poële. Les anglo-saxons y voient plutôt le dessin de la lettre ρ. L'algorithme "rho-Pollard" de factorisation des entiers est basé sur ce principe.

15) L'endomorphisme canoniquement associé à N transforme e_{j_1} en e_{j_p}, e_{j_p} en $e_{j_{p-1}}$,..., e_{j_2} en e_{j_1} et les autres e_i en le vecteur nul. On en déduit que le vecteur $\sum_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est propre pour N associé à la valeur propre 1.
Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde.

Partie III - Cas général

16) On remarque que W est le noyau de la restriction de L à V : $W = \ker(L_{|V}$.
D'après le théorème du rang appliqué à $L_{|V}$,

$$\dim V = \dim W + \dim(Im(L_{|V}) \leqslant \dim W + \dim \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) = \dim W + n - 1$$

D'après le théorème du rang appliqué à $K_{|W}$,

$$\dim W = \dim K(W) + \dim \ker K_{|W}$$

Or pour toute matrice M de $\ker K_{|W}$, on a $M \in V$, $L(M) = 0$ et $K(M) = 0$, donc $M \in C_n(V)$, et donc par hypothèse, $M = 0$.
Ainsi $\ker K_{|W} = \{0\}$ et donc $\dim W = \dim K(W)$.
On en déduit que

$$\dim V \leqslant \dim K(W) + n - 1$$

17) Soit $M \in W$; on a $M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0 & a(M) \end{pmatrix}$ qui est quasi nilpotente (car dans V) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence, sa

dimension est plus petite que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
La question précédente donne alors

$$\dim(V) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

18) D'après le lemme des colonnes, il existe j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n. V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc

$$\dim(V) = \dim(V^\sigma) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$