Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée $M^\top$.
Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.
On note $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.
On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 1 *Etant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*
On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit.
Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie B.
Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$.*

Partie I - Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$?
2) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
3) Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que
$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$
4) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5) Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que
$$A_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1} / \ M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\}$$
Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 1

Partie II - Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

6) Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right)$$

7) Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

8) En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On considère la matrice P_σ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

9) Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

10) Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

11) Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.
On pourra utiliser un changement de base.

12) Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

13) En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction

$$f\ :\ [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$$

14) En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1$$

15) Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

Partie III - Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On rappelle qu'on peut écrire toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et en particulier de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K\ :\ V \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L\ :\ V \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel

$$W = \{M \in V \mid L(M) = 0\}$$

Jusqu'à la question 17 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$.

16) Montrer que $\dim(V) \leqslant \dim(K(W)) + (n-1)$.

17) En déduire que $\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$.

18) Démontrer que $\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.