

## Exercice I

On note  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 Pour toute fonction  $f \in E$ , on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

On note  $H$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  telles que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .  
 Soit  $f \in H$  on appelle  $T(f)$  la fonction définie de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$T(f) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x - 2)) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $T : f \mapsto T(f)$  définit bien une application de  $H$  dans  $H$ .
- 2) Montrer que pour  $f, g$  dans  $H$ ,  $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ .

On construit une suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 0} \in H^{\mathbb{N}}$  en posant  $g_0 : x \mapsto x$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $g_{n+1} = T(g_n)$ .

- 3) Tracer les fonctions  $g_0, g_1$  et  $g_2$ .
- 4) Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 0}$  converge simplement. On note par la suite  $g$  la limite de cette suite.

*On pourra pour  $x \in [0, 1]$ , on pourra faire intervenir la série  $\sum_{k \geq 0} g_{k+1}(x) - g_k(x)$ .*

- 5) Montrer que la fonction  $g$  appartient à  $H$ .

On considère  $h_0 : x \mapsto \frac{1}{3}x$  et  $h_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$ . Ce sont les homothéties de la droite de rapport  $\frac{1}{3}$  et de centres 0 et 1.

On construit alors les ensembles  $K_0, K_1, \dots$  en posant  $K_0 = [0, 1]$  et, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n+1} = h_0(K_n) \cup h_1(K_n)$$

On note aussi  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

Pour tout entier  $n$ , on note alors  $U_n$  le complémentaire de  $K_n$  dans  $[0, 1]$  et  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  le complémentaire de  $K$  dans  $[0, 1]$ .

- 6) Décrire  $K_1$  et  $K_2$ .
- 7) Justifier que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  est une union d'un nombre fini d'intervalles ouverts.  
 En déduire que pour tout  $x \in U$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset U$ .
- 8) Montrer que la restriction de  $g$  à  $U$  est dérivable et que de plus, pour tout  $x \in U$ ,  $g'(x) = 0$ .

## Exercice II

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par

$$f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin(nt)$$

1) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ .

2) Soit  $a \in ]0, 1[$ .

a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .

b) En déduire que la fonction  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et montrer que, pour  $t \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(t) = \frac{\sin t + t \cos t - t^2}{1 - 2t \cos t + t^2}.$$

c) Montrer que  $f(t) = \arctan\left(\frac{t \sin t}{1 - t \cos t}\right)$  pour  $t \in ] -1, 1[$ .

3) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$ ,  $A_n(t) = \sum_{k=1}^n t^k \sin(kt)$ .

a) Montrer qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$  on ait  $|A_n(t)| \leq M$ .

*On cherche juste l'existence de  $M$ , on ne cherchera pas à calculer une valeur explicite.*

b) Montrer en écrivant  $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$  que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}$$

c) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  et que  $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  sur  $[-1, 1]$ . Montrer que  $f$  est continue sur cet intervalle.

d) En déduire les valeurs de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$ .