

Exercice

- 1) Par définition f est définie de E dans E . Montrons de plus que f est linéaire. Soit $U = (u_n)_{n \geq 1}$ et $U' = (u'_n)_{n \geq 1}$ dans E et λ, μ deux réels. Notons $f(U) = V = (v_n)_{n \geq 1}$, $f(U') = V' = (v'_n)_{n \geq 1}$ et $f(\lambda U + \mu U') = W = (w_n)_{n \geq 1}$. Par définition, pour tout entier $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda u_k + \mu u'_k = \lambda \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + \mu \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u'_k = \lambda v_n + \mu v'_n$$

Cela montre que $f(\lambda U + \mu U') = \lambda f(U) + \mu f(U')$.

- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n \geq 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$ et que $u_1 \neq 0$. Posons encore $f(U) = V = (v_n)_{n \geq 1}$. Au rang $n = 1$,

$$v_1 = \frac{1}{1} \sum_{k=1}^1 u_k = u_1 \text{ et } v_1 = \lambda u_1$$

Comme $u_1 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 1$.

On a alors au rang $n = 2$,

$$u_2 = 1 \times u_2 = v_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$$

On en déduit que $u_2 = u_1$.

Montrons alors par récurrence FORTE sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1$.

— Initialisation : Pour $n = 1$ on a bien $u_1 = u_1$.

— Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = u_1$. On a alors

$$u_{n+1} = 1 \times u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k \stackrel{(\text{HR})}{=} \frac{1}{n+1} (nu_1 + u_{n+1})$$

On en déduit que $u_{n+1} = u_1$

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1$.

On a donc montré que 1 est valeur propre de f et que $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Vect}(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la suite constante égale à 1.

- 3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n \geq 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$ et que $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$. Posons encore $f(U) = V = (v_n)_{n \geq 1}$. Au rang $n = 1$,

$$v_1 = \frac{1}{1} \sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = 0 \text{ et } v_1 = \lambda u_1 = 0$$

Cela ne donne aucune condition.

On a alors au rang $n = 2$,

$$\lambda \times u_2 = v_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}u_2$$

Comme $u_2 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \frac{1}{2}$.

On a alors au rang $n = 3$,

$$\frac{1}{2} \times u_3 = v_3 = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{1}{3}(u_2 + u_3)$$

Cela implique $u_3 = 2u_2$.

Un calcul similaire au rang $n = 4$ donne $u_4 = 3u_2$

Montrons alors par récurrence FORTE sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = (n-1)u_2$.

- Initialisation : Pour $n = 1$ on a bien $u_1 = 0$.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = (k-1)u_2$. On a alors

$$\frac{1}{2} \times u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k \stackrel{(\text{HR})}{=} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n (k-1)u_2 + u_{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n-1)}{2} u_2 + u_{n+1} \right)$$

On en déduit que $u_{n+1} = nu_2$

Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = (n-1)u_2$.

On a donc montré que $\frac{1}{2}$ est valeur propre de f et que $E_{1/2}(f) = \text{Ker}(f - \frac{1}{2}\text{id}_E) = \text{Vect}((n-1)_{n \geq 1})$.

- 4) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n \geq 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$. Pour $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. D'autre part, en posant $f(U) = (v_n)_{n \geq 1}$,

$$\lambda u_{n+1} = v_{n+1} = \frac{1}{n+1} S_{n+1}$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 0, \left(\lambda - \frac{1}{n+1} \right) S_{n+1} = \lambda S_n$$

- b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n \geq 1} \in E$. Soit $p \geq 2$. On suppose que $f(U) = \lambda U$ et que $u_1 = u_2 = \dots = u_{p-1} = 0$ et $u_p \neq 0$. Les rangs $1, 2, \dots, p-1$ ne donnent pas d'informations sur λ ou U .

En utilisant la question précédente au rang $p-1$, de sorte que $S_{p-1} = 0$ et $S_p = u_p \neq 0$. On a $\left(\lambda - \frac{1}{p} \right) S_p = \lambda S_{p-1} = 0$ ce qui implique que $\lambda = \frac{1}{p}$.

On a alors pour $n \geq p$,

$$S_{n+1} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}} S_n = \frac{n+1}{n+1-p} S_n$$

On en déduit

$$S_n = \frac{n(n-1) \dots (p+1)}{(n-p)(n-p) \dots 1} S_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} S_p = \binom{n}{p} u_p$$

Par suite, en utilisant la formule de Pascal, pour $n \geq p$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \binom{n-1}{p-1} u_p$$

On a donc montré que $\frac{1}{p}$ est valeur propre de f et que $E_{1/p}(f) = \text{Ker}(f - \frac{1}{p}\text{id}_E) = \text{Vect}((\binom{n-1}{p-1})_{n \geq 1})$.

Problème

Partie I

- 1) a) Soit p un projecteur, on sait que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. De plus comme $\text{rg}(p) = r$ alors $\text{Im}(p)$ est de dimension r . On considère une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im}(p)$ et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(p)$ (qui est de dimension $n-r$ d'après le théorème du rang) et que l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la famille obtenue en concaténant ces deux bases. On sait que $\mathcal{B}$ est une base de E . De plus,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

en effet pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p(e_i) = e_i$ car $e_i \in \text{Im}(p)$ et pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, $p(e_i) = 0$ car $e_i \in \text{Ker}(p)$.

- b) On en déduit que $\boxed{\text{tr}(p) = r}$.

- 2) a) Soient u et v deux endomorphismes de E . On veut montrer que $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
 Soit $z \in \text{Im}(u+v)$, par définition, il existe $x \in E$ tel que $z = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$. Or $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $v(x) \in \text{Im}(v)$ donc $z \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
 On en déduit que

$$\text{rg}(u+v) = \dim(\text{Im}(u+v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

- b) Soient $\pi_1, \dots, \pi_k$ des projecteurs de E .

On sait que l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$. De ce fait,

$$\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k) = \text{tr}(\pi_1) + \dots + \text{tr}(\pi_k) = \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_k).$$

Comme pour tout entier i compris entre 1 et k , $\text{rg}(\pi_i)$ est un entier, on obtient que $\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k)$ est un entier. De plus, en utilisant la question précédente,

$$\text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_k) \leq \text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_{k-1}) + \text{rg}(\pi_k) \leq \dots \leq \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_k).$$

Finalement $\boxed{\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k) \geq \text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_k)}$.

Partie II

- 3) On a $(CL)^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = CL$ car $LC = (1)$. Donc $\boxed{CL \text{ est idempotente}}$.

De plus, $\text{Im}(CL) \subset \text{Im}(C)$ qui est de dimension 1 donc $\text{rg}(CL) \in \{0, 1\}$. De plus, comme LC n'est pas nul, L n'est pas la matrice nulle. Comme $LCL = L$ pour la même raison que ci-dessus, on obtient que CL n'est pas nulle. Finalement $\boxed{\text{le rang de } CL \text{ vaut } 1}$.

- 4) a) On a $\text{tr}(M) = -3 + 6 = 3$ et $\text{rg}(M) = 2$ car $\det(M) = -25 \neq 0$.

- b) Par calcul $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc la famille (X_1, X_2) est libre.

- c) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

- d) On a $M'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $(M'_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{La matrice } M'_1 \text{ est bien idempotente}}$.

On a alors $M'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il suffit de poser $M'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet on vérifie facilement que M'_3 et M'_4 sont idempotentes et que $M'_2 = M'_3 + M'_4$.

- e) On a $M' = M'_1 + M'_3 + M'_4$ donc $M = PM'P^{-1} = M_1 + M_3 + M_4$ où pour tout $i \in \{1, 3, 4\}$ on pose $M_i = PM'_iP^{-1}$. De plus les matrices M_i sont idempotentes car pour tout i dans $\{1, 3, 4\}$, $M_i^2 = P(M'_i)^2P^{-1} = PM'_iP^{-1} = M_i$.

- 5) a) Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$ donc il existe λ_i tel que $v(e_i) = \lambda_i e_i$. On en déduit que

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

- b) Soit i et j dans $\llbracket 1, r \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $v(e_i + e_j) = v(e_i) + v(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Cependant, on sait que $v(e_i + e_j) \in \text{Vect}(e_i + e_j)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j)$. On en déduit que $(\lambda_i - \mu)e_i + (\lambda_j - \mu)e_j = 0$ et comme la famille (e_i, e_j) est libre comme sous-famille d'une base, $\lambda_i = \mu = \lambda_j$.

Finalement, $\boxed{\text{tous les coefficients diagonaux de } D \text{ sont identiques}}$.

- c) On en déduit que D est scalaire et donc v est une homothétie.

- 6) a) Soit λ, μ deux réels tels que $\lambda e + \mu(v(e) - e) = 0$. On a alors $(\lambda - \mu)e + \mu v(e) = 0$. Or $e \neq 0$ et $v(e) \notin \text{Vect}(e)$ donc $(e, v(e))$ est une famille libre. On en déduit que $\mu = 0$ puis que $\lambda = 0$.
On a bien montré que $\boxed{(e, v(e) - e) \text{ est libre}}$.
- b) La famille $(e, v(e) - e)$ étant libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{C}$ de E . Par définition, $v(e) = 1e + 1(v(e) - e)$. De ce fait, le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de v dans la base $\mathcal{C}$ vaut 1.
- 7) a) Comme u est de rang r , le noyau de u est de dimension $n - r$. Considérons $(e_1, \dots, e_{n-r})$ une base de $\text{Ker}(u)$. On peut compléter cette famille (qui est libre) en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F . Par définition, pour tout $i \in \llbracket 1, n - r \rrbracket$, $u(e_i) = 0$ donc la matrice de u dans cette base est de la forme.

$$M = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.

- b) On suppose A n'est pas de la forme λI_r avec $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la question 6. la matrice A est semblable à une matrice A' dont le coefficient de la première ligne et première colonne vaut 1. Précisément, il existe une matrice $P \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$. Posons alors $Q = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix}$ et

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & BP \\ O & P^{-1}AP \end{pmatrix}$$

C'est la forme désirée en posant $B' = BP$.

- c) On suppose que $A = \lambda I_r$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
On remarque que $M = M'' + Z$ où M'' est la matrice de l'énoncé et Z la matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient à la ligne $n - r + 1$ et la colonne $n - r + 1$ qui vaut 1. Il est clair de plus que Z est idempotente et de rang 1.
- d) On trouve une base comme dans la question 7.a.

— Si on est dans le cas où A n'est pas scalaire (cas de la question 7.b), on sait qu'il existe une base

$\mathcal{B}'$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $M' = \begin{pmatrix} O & B' \\ O & A' \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$

et $B' \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient à la première ligne et première colonne de A' vaut 1. On peut alors poser $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice entièrement composée de zéros sauf la $n - r + 1$ -ème colonne qui est égale à la $n - r + 1$ -ème colonne de M' . On note alors N la matrice obtenue à partir de M' en remplaçant la $n - r + 1$ -ième colonne par une colonne de zéros de telle sorte que $M' = N + T$. Maintenant, la matrice $T = CL$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la $n - r + 1$ -ème colonne de M' et $L = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en position $n - r + 1$. De plus, comme le coefficient de la $n - r + 1$ -ième ligne de C vaut 1 d'après 7.b, $LC = (1)$. En utilisant 3. on obtient que T est idempotente de rang 1.

On pose p et w les endomorphismes de E tels que leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ soit respectivement T et N . Alors, p est bien un projecteur de rang 1. De plus, $\text{tr}(w) = \text{tr}(N) = \text{tr}(u) - 1$ est bien entière et strictement inférieure à $\text{tr}(u)$. Pour finir, la matrice N a $n - r + 1$ colonnes de 0 donc $\text{rg}(w) \leq r - 1 \leq \text{tr}(u) - 1 = \text{tr}(w)$.

— Si on est dans le cas où A est scalaire (cas de la question 7.c), on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$

telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme $M = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et

$B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$. Si $A = I_r$ alors en élevant au carré, $M^2 = M$ donc u est un projecteur, on peut prendre $w = 0$.

Sinon, d'après 7.c, on peut écrire $M = Z + M''$. Si on note p_1 et v les endomorphismes dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont Z et M'' , on sait que p_1 est un projecteur de rang 1 et on peut appliquer ce qui précède à v car cette fois on sera dans le cas de la question 7.b et que $\text{tr}(v) = \text{tr}(u) - 1 \leq \text{tr}(u) \leq \text{rg}(u) = \text{rg}(v)$. On en déduit que $u = p_1 + p + w$ où $\text{tr}(w) = \text{tr}(u) - 2$, or par hypothèse, $\text{tr}(u) \geq r$ et $\text{tr}(u) \neq r$ car on a exclu le cas où $A = I_r$ donc $\text{tr}(u) \geq r + 1$. Donc $\text{tr}(w) = \text{tr}(u) - 2 \geq r - 1 = \text{rg}(w)$.

Dans tous les cas, u est somme d'un ou deux projecteurs et d'un endomorphisme w dont la trace est entière, strictement inférieure à celle de u , et supérieure ou égale au rang de w .

- e) Il suffit de réitérer le procédé ci-dessus jusqu'à ce que la trace de l'endomorphisme considéré soit nulle, ce qui implique que son rang est aussi nul.

Partie III

- 8) a) Par la question 2)a) (étendue à plus de 2 termes),

$$E = \text{Im}(\text{id}_E) \subset \text{Im}(\pi_1) + \dots + \text{Im}(\pi_p) = E_1 + \dots + E_p$$

- b) Si $p = 2$, $\pi_2 = \text{id}_E - \pi_1$ est le projecteur sur $\text{Ker}(\pi_1)$ parallèlement à $\text{Im}(\pi_1)$. Donc $\text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1)$.

Comme π_1 est un projecteur,

$$E = \text{Im}(\pi_1) \oplus \text{Ker}(\pi_1) = E_1 \oplus E_2$$

- c) Par linéarité de la trace, on a

$$\dim(E) = \text{tr}(\text{id}_E) = \text{tr}(\pi_1) + \dots + \text{tr}(\pi_p)$$

Par la question 1)b), on a donc :

$$\dim(E) = \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$$

Par la question 8)a) on a ainsi

$$\dim(E_1 + \dots + E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$$

D'après le cours, ceci implique que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe.

Ainsi

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$$

- 9) a) E n'est pas vide car il contient $O_{\mathbb{K}(X)} = \frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{X^0}$.

Soient F, G des éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors $m, n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$F = \frac{P}{X^m} \text{ et } G = \frac{Q}{X^n}$$

.

$$\lambda F + G = \frac{\lambda X^n P + X^m Q}{X^{m+n}} \in E$$

car $\lambda X^n P + X^m Q \in \mathbb{K}[X]$ et $m+n \in \mathbb{N}$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$.

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, $X^n = \frac{X^n}{X^0}$ appartient à E et pour tout $n \in -\mathbb{N} = \mathbb{Z}^-$, $X^n = \frac{1}{X^{-n}} \in E$. Soit $F \in E$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_p \in K$ tels que :

$$F = \frac{a_0 + \dots + a_p X^p}{X^q} = a_0 X^{-q} + a_1 X^{1-q} + \dots + a_p X^{p-q}$$

Donc $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ engendre E .

Soit I une partie finie de $\mathbb{Z}$ et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$0_E = \sum_{i \in I} \lambda_i X^i = \sum_{i \in I \cap \mathbb{N}} \lambda_i X^i + \sum_{i \in I \cap (-\mathbb{N}^*)} \lambda_i \frac{1}{X^{-i}}$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples de la fraction nulle, tous les λ_i sont nuls.

Donc $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre puisque toutes ses sous-familles finies sont libres. [On pouvait aussi raisonner avec des familles de scalaires à support fini plutôt qu'avec des sous-familles finies de vecteurs].

Donc $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de E .

- 10) L'application u est linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{K}(X)$.
De plus u est à valeurs dans E car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u(X^k) = kX^k \in E$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre E .
Donc u est un endomorphisme de E .

- 11) Comme u est linéaire,

$$u(A_n) = \text{Vect}(u(X^{-n}), u(X^{n+2})) = \text{Vect}(-nX^{-n}, (n+2)X^{n+2}) \subset A_n$$

Donc A_n est stable par u .

- 12) On sait que (X^{-n}, X^{n+2}) est une base de A_n . De plus, la matrice de u_n dans cette base est $\begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & n+2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\text{tr}(u_n) = -n + n + 2 = 2$.

- 13) Le rang de u_n est au plus égal à $\dim(A_n) = 2$ et sa trace est un entier égal à 2, donc u_n est somme de projecteurs. Plus précisément, u_n est somme d'au plus 2 projecteurs non nuls (car la trace d'un projecteur non nul vaut au moins un). Donc u_n est somme de deux projecteurs.

- 14) Soit p l'unique application linéaire de E dans lui-même transformant la base $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en la famille $(F_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$F_k = \begin{cases} X & \text{si } k = 1 \\ p_{-k}(F_k) & \text{si } k \leq 0 \\ p_{k-2}(F_k) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Alors p est l'unique endomorphisme de E satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Idem mutatis mutandis pour q .

- 15) Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ on a $p^2(X^k) = p_n^2(X^k) = p_n(X^k) = p(X^k)$, où n est l'unique entier naturel tel que $X^k \in A_n$, défini comme à la question précédente. De plus $p^2(X) = p(X) = X$.

Donc $p^2 = p$ car p^2 et p sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E .

Donc p est un projecteur.

Idem pour q .

Les endomorphismes $p+q$ et u coïncident sur $\text{Vect}(X)$ et sur chacun des A_n (car $p-n+q_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc $p+q$ et u coïncident sur la base $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de E . Etant linéaires, elles coïncident sur E . Ainsi $p+q = u$.

- 16) L'application s est linéaire par linéarité à droite de la composition formelle par $1/X$ (qui est bien définie sur $\mathbb{K}(X)$ car pour Q polynôme non nul, $Q(1/X)$ n'est pas la fraction nulle car son degré est $-d^o(Q) \neq -\infty$).

De plus, $s(E) = \text{Vect}(s(X^k))_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Vect}(X^{-k})_{k \in \mathbb{Z}} = E \subset E$ donc E est stable par s .

Pour tout $F \in E$, $u(s(F)) = u(F(1/X)) = X(F(1/X))' = X \frac{-1}{X^2} F'(1/X) = -\frac{1}{X} F'(1/X) = -s(u(F))$.

Donc $u \circ s = -s \circ u$.

- 17) Comme $s^2 = \text{id}_E$, on a

$$(s \circ p \circ s)^2 = s \circ p \circ s^2 \circ p \circ s = s \circ p \circ \text{id}_E \circ s = s \circ p \circ s$$

donc $s \circ p \circ s$ est un projecteur. Idem pour $s \circ q \circ s$.

$$\check{p} + q = s \circ (p + q) \circ s = s \circ u \circ s = -u \circ s \circ s = -u$$

- 18)

$$\text{id}_E = \text{id}_E + u - u = \text{id}_E + p + q + \check{p} + \check{q}$$

Chaque terme de cette somme est un projecteur, et comme $\text{Im}(\text{id}_E) \cap \text{Im}(p) = \text{Im}(p) \ni X \neq 0_E$, les images de ces projecteurs ne sont pas en somme directe.