L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
L'exercice et le problème sont indépendants

Exercice

Soit $E = (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites de réels indexées par $\mathbb{N}^*$ et

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ U = (u_n)_{n\geqslant 1} & \mapsto & V = (v_n)_{n\geqslant 1} \end{array}$$

où $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$ et que $u_1 \neq 0$. Montrer que $\lambda = 1$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$, que $u_1 = 0$ et que $u_2 \neq 0$. Montrer que $\lambda = \frac{1}{2}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \frac{1}{2}\mathrm{id}_E)$.
4. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$. On suppose que $f(U) = \lambda U$. Soit $n \geqslant 1$, déterminer une relation entre S_n et S_{n+1} où, pour tout entier $m \geqslant 1$, on pose $S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k$.

   b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.

Problème

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur et r son rang.

   a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de p est
   $$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

   b) En déduire la valeur de la trace de p.

2. a) Soient u et v deux endomorphismes de E.
   Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

   b) Soient $\pi_1, \ldots, \pi_k$ des projecteurs de E.
   Montrer que la trace de l'endomorphisme $\pi_1 + \ldots + \pi_k$ est entière et supérieure ou égal au rang de cet endomorphisme.

Partie II

Dans cette partie E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. On note $n = \dim(E)$.
On s'intéresse dans cette partie à établir la réciproque de la propriété démontrée à la question 2.b)
On dit qu'une matrice carrée est **idempotente** si et seulement si elle est égale à son carré.

3. Soient $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $LC = (1) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$.
   Montrer que $CL \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est idempotente et que son rang est 1.

4. **Dans cette question uniquement**, on pose $M = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

   a) Donner la trace et le rang de M.

   b) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = MX_1 - X_1$. Vérifier que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

   c) On note P la matrice dont les colonnes sont X_1 et X_2. Calculer $M' = P^{-1}MP$. On s'assurera que le coefficient de la première ligne et première colonne de M' vaut 1.

   d) On note $M'_1 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ la matrice dont la première colonne est celle de M' et dont la seconde colonne est nulle. On note $M'_2 = M' - M'_1$.
   Montrer que M'_1 est idempotente et que M'_2 peut s'écrire comme somme de deux matrices idempotentes M'_3 et M'_4.

   e) En déduire une écriture de M comme somme de matrices idempotentes dont on ne cherchera pas à expliciter les coefficients mais qu'on exprimera à l'aide de M'_1, M'_3, M'_4 et P.

5. Soit v un endomorphisme de E.
   On suppose que pour tout vecteur x de E, $v(x) \in \mathrm{Vect}(x)$.
   Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

   a) Montrer que D est diagonale.

   b) En considérant les vecteurs $e_i + e_j$ pour $i \neq j$ et leurs images par v, montrer que les coefficients diagonaux de D sont identiques.

   c) Qu'en conclure pour v ?

6. Soit v un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.
   Soit e un vecteur de F tel que $v(e) \notin \mathrm{Vect}(e)$.

   a) Montrer que $(e, v(e) - e)$ est libre.

   b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E telle que le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de v dans la base $\mathscr{C}$ vaut 1.

   Ainsi toute matrice qui n'est pas de la forme λI_n ($\lambda \in \mathbb{K}$) est semblable à une matrice dont le coefficient de la première ligne et première colonne vaut 1.

7. Soit u un endomorphisme de E de rang r.

   a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

   $$M = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix}$$

   avec $A \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.

   On suppose de plus que la trace u est entière et supérieure ou égale à r.
   On suppose également dans les questions b),c) et d) que $r > 0$.

b) Si A n'est pas de la forme λI_r avec $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que M est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} O & B' \\ O & A' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $B' \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient de la première ligne et première colonne de A' est égal à 1.

c) On suppose que $A = \lambda I_r$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
Montrer que M est somme d'une matrice idempotente de rang 1 et de la matrice

$$M'' = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A'' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A'' = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$$

d) En déduire que u est somme d'un ou deux projecteurs et d'un endomorphisme w dont la trace est entière, strictement inférieure à celle de u, et supérieure ou égale au rang de w.

e) En déduire que u est une somme de projecteurs.

Partie III

Dans cette partie on s'intéresse aux décompositions de l'endomorphisme identité comme somme de projecteurs.

8. On considère E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non nécessairement de dimension finie sauf à la question 8.c). Soient $\pi_1, \ldots, \pi_p$ des projecteurs de E tels que $\pi_1 + \ldots + \pi_p = \mathrm{id}_E$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $E_i = \mathrm{Im}(\pi_i)$.

   a) Montrer que $E = E_1 + \ldots + E_p$.

   b) Montrer que si $p = 2$, $E = E_1 \oplus E_2$.

   c) **Dans cette question seulement**, on suppose que E est de dimension finie.
   En utilisant la question 1.b) montrer que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

Dans la suite du problème, on va construire des projecteurs dont la somme est l'identité et dont les images ne sont pas en somme directe. On aura bien sûr $p \neq 2$ et E ne sera pas de dimension finie.

Soit $E = \{\frac{P}{X^n}, P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ (par exemple $\frac{2X+1}{X^5} \in E$ mais $\frac{3X+2}{X-1} \notin E$ puisque 1 est un pôle de cette fraction).
Pour tout $F \in E$ on pose $u(F) = XF'$.

9. a) Montrer que que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$.

   b) Montrer que $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de E.

10. Montrer que u est un endomorphisme de E et calculer $u(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

11. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \mathrm{Vect}(X^{-n}, X^{n+2})$.
    Montrer que A_n est stable par u. On note u_n la restriction de u à A_n.

12. Déterminer la trace de u_n.

13. Expliquer sans calcul pourquoi u_n est somme de deux projecteurs. Notons p_n et q_n deux projecteurs de A_n tels que $u_n = p_n + q_n$.

14. Montrer qu'il existe alors un unique endomorphisme p de E tel que

$$p(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall F \in A_n,\ p(F) = p_n(F)$$

et un unique endomorphisme q de E tel que

$$q(X) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall F \in A_n,\ q(F) = q_n(F)$$

15. Montrer que p et q sont des projecteurs. Que dire de $p + q$?
16. Pour tout $F \in E$, on pose $s(F) = F(\frac{1}{X})$. Vérifier qu'on définit ainsi un endomorphisme de E et que $u \circ s = -s \circ u$.
17. On pose $\check{p} = s \circ p \circ s$ et $\check{q} = s \circ q \circ s$.
Montrer que $\check{p}$ et $\check{q}$ sont des projecteurs de E. Que dire de $\check{p} + \check{q}$?
18. En déduire que id_E est somme de cinq projecteurs dont les images ne sont pas en somme directe.