



Nom :

DS 2

Soin) 1 2 3 4

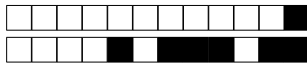
- 1) f lineaire 0 1
- 2) si $u_1 \neq 0$ alors $\lambda = 1$ 0 1
 et $u_n = u_1$ 0 1
 redaction recurrence 0 1
- 3) si $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ alors $\lambda = \frac{1}{2}$ 0 1
 et $u_n = (n-1)u_2$ 0 1 2
- 4.a) $f(U) = \lambda U$ implique $\lambda S_n = (\lambda - \frac{1}{n+1})S_{n+1}$ 0 1
- 4.b) idee de regarder $u_1 = \dots = u_{p-1} = 0$ et $u_p \neq 0$ 0 1
 trouver $s_n = \binom{n}{p}u_p$ 0 1
 puis $u_n = \binom{n-1}{p-1}u_p$ 0 1
 conclusion 0 1 2

- 1)a) \exists base $\text{Mat}(p) = J_r$ 0 1 2
- 1)b) $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ 0 1
- 2)a) $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ 0 1
 $\text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ 0 1
- 2)b) $\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k)$ entiere 0 1
 $\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k) \geq \text{rg}$ 0 1

- 3) CL idempotente 0 1
 $\text{rg}(CL) \leq 1$ 0 1
 $\text{rg}(CL) = 1$ 0 1
- 4)a) $\text{tr}(M) = 3$ 0 1
 $\text{rg}(M) = 2$ 0 1
- 4)b) $X_1 = (1,0)^T, X_2 = MX_1 - X_1. (X_1, X_2)$ libre ($X_2 = (-4,1)^T$) 0 1

- 4)c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0 1
- 4)c) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 0 1
- 4)d) M'_1 idempotente 0 1
 $M'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 27 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0 1 2
- 4)e) M somme d'idempots 0 1 2
- 5)a) D diagonale 0 1
- 5)b) D scalaire 0 1
 $\text{car}(e_i, e_j)$ libre 0 1
- 5)c) Donc v homothetie 0 1
- 6)a) $(e, v(e) - e)$ libre 0 1
- 6)b) $\exists B$ tq $a_{11} = 1$ dans $\text{Mat}_B(v)$ 0 1
- 7)a) $\exists B$ tq $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 0 1
- 7)b) $A \neq \lambda I \Rightarrow \text{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec $a'_{11} = 1$ 0 1 2
- 7)c) Cas $A = \lambda I$ 0 1 2
- 7)d) $u = p + w$ ou $p_1 + p_2 + w$ et $\text{rg}(w) \leq \text{tr}(w) < \text{tr}(u)$ 0 1 2
- 7)e) u somme de projecteurs 0 1 2

- 8)a) $E = E_1 + \dots + E_p$ 0 1
- 8)b) si $p = 2$ alors $E = E_1 \oplus E_2$ 0 1
- 8)c) p qqe et E de dimension finie $\text{dim} = \sum \text{dim}$ 0 1
 $E = \oplus E_i$ 0 1
- 9)a) E sev de $\mathbb{K}(X)$ 0 1
- 9)b) $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ libre 0 1
 $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre E 0 1
- 10) u lineaire 0 1



- $u(X^k) = kX^k$ 0 1
- E stable par u 0 1
- 11) A_n stable par u 0 1
- 12) $\text{tr}(u_n) = 2$ 0 1
- 13) u_n est somme de projecteurs 0 1
- u_n est somme de DEUX projecteurs 0 1
- 14) $\exists! p, q$ 0 1
- 15) p et q sont des projecteurs 0 1
- $p + q = u$ 0 1 2
- 16) s linéaire 0 1
- et stabilise E 0 1
- $us = -su$ 0 1
- 17) $\check{p} = sps$ et un projecteur (et \check{q} aussi) 0 1
- $\check{p} + \check{q} = -u$ 0 1
- 18) id_E est somme de cinq projecteurs 0 1
- dont les images ne sont pas en somme directe 0 1
- Bonus) -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
- 0 1
- 0 1 2
- 0 1 2

