Nom :

DS 2

Soin) .... □1 □2 □3 □4

1) f lineaire .... □0 □1

2) si $u_1 \neq 0$ alors $\lambda = 1$ .... □0 □1

et $u_n = u_1$ .... □0 □1

redaction recurrence .... □0 □1

3) si $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ alors $\lambda = \frac{1}{2}$ .... □0 □1

et $u_n = (n-1)u_2$ .... □0 □1 □2

4.a) $f(U) = \lambda U$ implique $\lambda S_n = (\lambda - \frac{1}{n+1})S_{n+1}$ .... □0 □1

4.b) idee de regarder $u_1 = \cdots = u_{p-1} = 0$ et $u_p \neq 0$ .... □0 □1

trouver $s_n = \binom{n}{p} u_p$ .... □0 □1

puis $u_n = \binom{n-1}{p-1} u_p$ .... □0 □1

conclusion .... □0 □1 □2

---

1)a) $\exists$ base $\mathrm{Mat}(p) = J_r$ .... □0 □1 □2

1)b) $tr(p) = \mathrm{rg}(p)$ .... □0 □1

2)a) $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ .... □0 □1

$\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ .... □0 □1

2)b) $\mathrm{tr}(\pi_1 + \cdots \pi_k)$ entiere .... □0 □1

$\mathrm{tr}(\pi_1 + \cdots \pi_k) \geqslant \mathrm{rg}$ .... □0 □1

---

3) CL idempotente .... □0 □1

$\mathrm{rg}(CL) \leqslant 1$ .... □0 □1

$\mathrm{rg}(CL) = 1$ .... □0 □1

4)a $\mathrm{tr}(M) = 3$ .... □0 □1

$\mathrm{rg}(M) = 2$ .... □0 □1

4)b) $X_1 = (1,0)^T$, $X_2 = MX_1 - X_1$. (X_1, X_2) libre ($X_2 = (-4,1)^T$) . □0 □1

4)c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. .... □0 □1

4)c) $M' = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. .... □0 □1

4)d) M'_1 idempotente .... □0 □1

$M'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 27 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .... □0 □1 □2

4)e) M somme d'idempts .... □0 □1 □2

5)a) D diagonale .... □0 □1

5)b) D scalaire .... □0 □1

car (e_i, e_j) libre .... □0 □1

5)c) Donc v homothetie .... □0 □1

6)a) $(e, v(e) - e)$ libre .... □0 □1

6)b) $\exists B$ tq $a_{11} = 1$ dans $\mathrm{Mat}_B(v)$ .... □0 □1

7)a) $\exists B$ tq $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ .... □0 □1

7)b) $A \neq \lambda I \Rightarrow \mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec $a'_{11} = 1$ .... □0 □1 □2

7)c) Cas $A = \lambda I$ .... □0 □1 □2

7)d) $u = p + w$ ou $p_1 + p_2 + w$ et $\mathrm{rg}(w) \leqslant tr(w) < tr(u)$ .... □0 □1 □2

7)e) u somme de projecteurs .... □0 □1 □2

---

8)a) $E = E_1 + \ldots + E_p$ .... □0 □1

8)b) si $p = 2$ alors $E = E_1 \oplus E_2$ .... □0 □1

8)c) p qque et E de dimension finie $\dim = \sum \dim$ .... □0 □1

$E = \oplus E_i$ .... □0 □1

9)a) E sev de $\mathbb{K}(X)$ .... □0 □1

9)b) $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ libre .... □0 □1

$(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre E .... □0 □1

10) u linéaire .... □0 □1

$u(X^k) = kX^k$ .... ☐0 ☐1

E stable par u .... ☐0 ☐1

11) A_n stable par u .... ☐0 ☐1

12) $\mathrm{tr}(u_n) = 2$ .... ☐0 ☐1

13) u_n est somme de projecteurs .... ☐0 ☐1

u_n est somme de DEUX projecteurs .... ☐0 ☐1

14) $\exists! p, q$ .... ☐0 ☐1

15) p et q sont des projecteurs .... ☐0 ☐1

$p + q = u$ .... ☐0 ☐1 ☐2

16) s linéaire .... ☐0 ☐1

et stabilise E .... ☐0 ☐1

$us = -su$ .... ☐0 ☐1

17) $\check{p} = sps$ et un projecteur (et $\check{q}$ aussi) .... ☐0 ☐1

$\check{p} + \check{q} = -u$ .... ☐0 ☐1

18) id_E est somme de cinq projecteurs .... ☐0 ☐1

dont les images ne sont pas en somme directe .... ☐0 ☐1

Bonus) .... ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1 ☐2

.... ☐0 ☐1 ☐2