DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Le sujet comporte trois parties, les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Notations :

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et, pour $1 \le p < +\infty$, on pose $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

Noter que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est bien une norme (pour $1 \le p \le +\infty$) sur E. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit f^+ par $f^+(x) = \max(f(x),0)$ (pour tout $x \in [0,1]$), et $f^- = (-f)^+$ (de sorte que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$).

Soient f et g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), on dit que $f \ge g$ si $f(x) \ge g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

On désigne par 0 la fonction (définie sur $[0,1]$) identiquement nulle.

On pose $E^+ = \{f \in E, f \ge 0\}$.

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est positive si :

$$f \in E, f \ge 0 \Rightarrow T(f) \ge 0.$$

On dit que T est ∞-continue si : $\qquad \exists M \ge 0\,;\ |T(f)| \le M\|f\|_\infty, \forall f \in E.$

Partie I *Décomposition d'une application linéaire continue en différence d'applications positives.*

Question I 1. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

Montrer que T est ∞-continue.

[Indication : On pourra remarquer que, pour tout $f \in E$, $T(f) \le T(1)\|f\|_\infty$, où **1** désigne la fonction constante et égale à 1 sur $[0,1]$.]

Définition 1 *Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire.*

1. *On définit l'application T^+ de E^+ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ (= [0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$ par :*

$$T^+(f) = \sup_{g\in E,\, 0\le g\le f} (T(g)),\ \forall f \in E^+.$$

2. *Si $T^+(f) < +\infty$ pour tout $f \in E^+$, on définit T^+ sur tout E (à valeurs dans $\mathbb{R}$) par :*

$$T^+(f) = T^+(f^+) - T^+(f^-), \forall f \in E.$$

Question I 2. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire ∞-continue. Montrer que $T^+(f) < +\infty$ pour tout $f \in E^+$.

Question I 3. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire.
a. Montrer que $T^+(\alpha f) = \alpha T^+(f)$, pour tout $f \in E^+$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
b. Montrer que $T^+(f+g) = T^+(f) + T^+(g)$, pour tous $f, g \in E^+$.
[Indication : On pourra remarquer que, si $0 \leq h \leq f+g$, on a $h = h_1 + h_2$, avec $h_1(x) = \min(h(x), f(x))$, $\forall x \in [0,1]$.]

Question I 4. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On suppose que $T^+(f) < +\infty$ pour tout $f \in E^+$ (on définit donc T^+ sur E tout entier).
a. Montrer que T^+ est une application linéaire positive de E dans $\mathbb{R}$.
b. On définit T^- sur E par $T^- = T^+ - T$. Montrer que T^- est une application linéaire positive de E dans $\mathbb{R}$.
c. En déduire que T est ∞-continue et peut s'exprimer comme la différence de deux applications linéaires positives.

Définition 2 *Soit $\varphi \in E$. On définit T_φ de E dans $\mathbb{R}$ par :*

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx, \ \forall f \in E$$

Question I 5. Soit $\varphi \in E$. Montrer que T_φ est ∞-continue. Montrer que T_φ est positive si et seulement si $\varphi \geq 0$.

Question I 6. Soit $\varphi \in E$.
a. Soit $f \in E^+$. Montrer que $T_\varphi^+(f) \leq T_{\varphi^+}(f)$.
b. Soit $f \in E^+$. Montrer que $T_\varphi^+(f) \geq T_{\varphi^+}(f)$.
[Indication : On pourra remarquer, en le justifiant, que φ_n définie par $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(x)\varphi^+(x)}{|\varphi(x)| + \frac{1}{n}}$, pour tout $x \in [0,1]$, converge uniformément vers φ^+ quand $n \to +\infty$.]
c. Montrer que $T_\varphi^+(f) = T_{\varphi^+}(f)$, pour tout $f \in E$.

Partie II *Troncature d'une application linéaire continue.*

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire et soit $1 \leq p \leq +\infty$. On dit que T est p-continue si :

$$\exists M \geq 0 ; \ |T(f)| \leq M \|f\|_p, \ \forall f \in E.$$

Question II 1. Soient p, q tels que $1 \leq p < q < +\infty$ et $f \in E$. Montrer que :

$$|f(x)|^p \leq \frac{|f(x)|^q}{\delta^{q-p}} + \delta^p, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall \delta > 0.$$

En choisissant convenablement δ (ce choix est indépendant de x, mais dépendant de f), en déduire que :

$$\|f\|_p \leq (2)^{\frac{1}{p}} \|f\|_q.$$

Question II 2. Soient p, q tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$, et $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer que si T est p-continue alors T est q-continue (distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$).

Question II 3. Soient p, q tels que $1 \leq p < q < +\infty$, et $\varphi :]0,1] \to \mathbb{R}_+$. On suppose que φ est continue et que $\int_0^1 (\varphi(x))^{\frac{q}{q-1}} dx$ est convergente.

a. Montrer que pour tout $f \in E$, $\int_0^1 \varphi(x) f(x) dx$ est convergente.
On définit $T : E \to \mathbb{R}$ par :

$$T(f) = \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx, \forall f \in E.$$

b. Montrer que $|\varphi(x) f(x)| \leq |(f(x))|^q + (\varphi(x))^{\frac{q}{q-1}}$, pour tout $x \in]0,1]$. En déduire que T est q-continue.
c. En prenant φ de la forme $\varphi(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, avec $\alpha > 0$ convenablement choisi, donner un exemple d'application $T : E \to \mathbb{R}$ linéaire q-continue et non p-continue.

Question II 4. Soit p tel que $1 \leq p < +\infty$. Donner un exemple d'application $T : E \to \mathbb{R}$ linéaire ∞-continue et non p-continue.

Question II 5. Soient $1 \leq q < +\infty$ et $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive q-continue.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $T_n : E \to \mathbb{R}$ par :

$$T_n(f) = \inf_{g \in E, 0 \leq g \leq f} (T(g) + n\|f - g\|_1), \quad \forall f \in E^+,$$

$$T_n(f) = T_n(f^+) - T_n(f^-), \quad \forall f \in E.$$

a. Montrer que :

$$0 \leq T_n(f) \leq T_{n+1}(f) \leq T(f), \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E^+, \tag{0.1}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad T_n \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad T_n \text{ est 1-continue.} \tag{0.3}$$

[Indication : Pour montrer l'assertion 0.2, on pourra commencer par montrer que pour tous $f_1, f_2 \in E^+, T_n(f_1 + f_2) = T_n(f_1) + T_n(f_2)$.]
b. Soit $f \in E^+$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in E$ telle que $0 \leq g_n \leq f$ et $T_n(f) \leq T(g_n) + n\|f - g_n\|_1 \leq T_n(f) + \frac{1}{n}$. Montrer que $\|f - g_n\|_q \to 0$.
[Indication : On pourra commencer par remarquer que $\|f - g_n\|_1 \to 0$.]
En déduire que $T_n(f) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$.
c. Montrer que :

$$T_n(f) \to T(f), \text{ quand } n \to +\infty, \forall f \in E. \tag{0.4}$$

Question II 6. Soient $1 \leq q < +\infty$ et $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire q-continue. Montrer (en utilisant la partie I) qu'il existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite d'applications linéaires 1-continues, telle que $T_n(f) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $f \in E$.

Question II 7. On définit $T : E \to \mathbb{R}$ par $T(f) = f(0)$, $\forall f \in E$.
Montrer que T est linéaire ∞-continue. Soit $S : E \to \mathbb{R}$ linéaire 1-continue et telle que $0 \leq S(f) \leq T(f)$, pour tout $f \in E^+$, montrer que $S \equiv 0$. En déduire qu'il n'existe pas de suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant 0.1, 0.2, 0.3, 0.4.

Partie III *Convergence dominée.*

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

Question III 1. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.
Montrer que f_n tend vers f uniformément sur $[0,1]$.
[Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n = \{x \in [0,1]\,;\, f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ et utiliser la compacité de $[0,1]$.]
En déduire que $T(f_n) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$.

Question III 2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, pour tout $x \in [0,1]$.
Montrer que $T(g) \leq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que $f \in A^+$ s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que :

$$f_{n+1} \geq f_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

$$\textit{et} \lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty.$$

Question III 3. Soit $f \in A^+$, montrer que $\sup_{g\in E, g\leq f} (T(g)) < +\infty$.

On définit T sur A^+ par $T(f) = \sup_{g\in E, g\leq f} (T(g))$ (noter que ceci est compatible avec la définition de T sur E. Noter aussi que si $f, g \in A^+$, alors : $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$).

Question III 4. ("Convergence croissante.")
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que :

$$f_{n+1} \geq f_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

$$\textit{et} \lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty.$$

Montrer que $f \in A^+$ et $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

[Indication : Considérer $g_p = \sup_{0\le n\le p}(f_{p,n})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{p,n})_{p\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $f_{p+1,n} \ge f_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} f_{p,n}(x) = f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.]

Question III 5. ("Convergence décroissante.")
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f \in E$ telles que :

$$f_{n+1} \le f_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\textit{et} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Montrer que $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.
[Indication : On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in A^+$ telle que $h_n \ge f_n - f_{n+1}$ et $T(h_n) \le T(f_n) - T(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Puis, en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \ge f_0(x) - f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, et en utilisant la question III 4, montrer que $T(f) \ge \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.]

Question III 6. ("Convergence dominée.")
Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que :
1. $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
2. $|g_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $T(g) = \lim_{n\to+\infty} T(g_n)$.
[Indication : On pourra utiliser la question III 5 avec $f_n = \sup_{p\ge n} g_p - \inf_{p\ge n} g_p$ et remarquer que $g - g_n \le f_n$ et $g_n - g \le f_n$.]

Question III 7. (Exemple.) En choisissant convenablement T, montrer le résultat suivant :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que :
1. $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
2. $|f_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

alors $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.
Donner un contre exemple à ce résultat si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Question III 8. Montrer que le résultat de la question III 6 est encore vrai si l'hypothèse "T positive" est remplacée par "T ∞-continue".