1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Corrigé

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln t} dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{t^2} dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t^3-5t^2+8t-4}} dt$ ☐ Converge ☑ Diverge

2. Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$$

(a) Montrer que I_n converge

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$t^2 f_n(t) = t^{n+2} e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $t^{n+2}e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}$ et que $X^\alpha e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $f_n(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_n aussi. Cela montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n$ est absolument convergente donc convergente puis que I_n est convergente.

(b) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

Corrigé

On procède par intégration par partie.

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n+1} I_{n+2} = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

car le crochet converge et vaut 0.

Remarque : En sachant que

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(intégrale de Gauss)}$$

et que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

on peut exprimer I_n.