

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \cos(t)}{1 + n^2 t^2} dt$.

On pourra commencer par faire un changement de variables.

Corrigé

Soit $n \geq 1$. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \cos(t)}{1 + n^2 t^2} dt$. On commence par poser $u = nt$. La fonction $t \mapsto nt$ est strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. L'intégrale I_n est de même nature que

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + u^2} du$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + u^2}$. Ce sont des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : u \mapsto \frac{\cos\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2}$ elle-même continue sur $[0, +\infty[$.

Pour finir, pour tout $u \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(u)| \leq f(u)$. La fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $f(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, les intégrales J_n convergent (et donc les intégrales I_n aussi) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

2. Soit a, b deux réels strictement positifs, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}$$

Corrigé

Soit $x \in]0, +\infty[$, $e^{-bx} \in]-1, 1[$ donc

$$\frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} = xe^{-ax} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-bx})^n = \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(a+bn)x}$$

Posons $f_n : x \mapsto xe^{-(a+bn)x}$. Ce sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers $S : x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f_n se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$; elle est donc intégrale sur $]0, 1]$.
- On voit que $x^2 f_n(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^3 e^{-ax}$ car $e^{-bx} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Cela montre que $f_n(x) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Comme de plus $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, f_n aussi.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f_n| &= \int_0^{\infty} f_n \\ &= \int_0^{\infty} xe^{-(a+bn)x} dx \\ &= \left[-\frac{xe^{-(a+bn)x}}{a+bn} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{a+bn} \int_0^{\infty} e^{-(a+bn)x} dx \text{ car le crochet converge et vaut } 0 \\ &= \frac{1}{a+bn} \left[-\frac{e^{-(a+bn)x}}{a+bn} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(a+bn)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_0^{\infty} |f_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{b^2 n^2}$ et donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} |f_n|$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction S est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} xe^{-(a+bn)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}$$