

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. Soit P un polynôme de degré au plus n , $\varphi(P)$ est un polynôme. De plus :
- Si P est de degré $d < n$ alors P' est de degré au plus $d - 1$. On en déduit que

$$\deg(X(1-X)P') \leq 2 + (d-1) = d+1 \leq n \quad \text{et} \quad \deg(XP) = d+1 \leq n$$

Finalement $\deg(\varphi(P)) \leq n$.

- Si P est de degré n , en posant $P = \alpha X^n + Q$ où $\deg(Q) < n$, on obtient que

$$\varphi(P) = -\alpha X^{n+1} + \alpha X^n + \alpha X^{n+1} + \varphi(Q) = \alpha X^n + \varphi(Q)$$

En réutilisant ce qui précède, on obtient que $\deg(\varphi(P)) \leq n$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\varphi(X^k) = \frac{k}{n} X(1-X)X^{k-1} + X^{k+1} = \frac{1}{n} (kX^k + (n-k)X^{k+1})$$

On en déduit que la matrice de φ dans la base \mathcal{B} est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$$

3. a) Avec les notations de l'énoncé

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{X - a_i}$$

- b) Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(P) = \lambda P \iff X(1-X)P' + nXP = n\lambda P \iff X(1-X)P' = n(\lambda - X)P \iff \frac{P'}{P} = \frac{n(\lambda - X)}{X(1-X)}$$

- c) Procédons par analyse-synthèse.

— **Analyse** : Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre (non nul) associé. D'après la question précédente, $\frac{P'}{P} = \frac{n(X - \lambda)}{X(X - 1)}$. En effectuant une décomposition en éléments simples sur le deuxième membre de cette égalité on obtient

$$\frac{P'}{P} = \frac{n(X - \lambda)}{X(X - 1)} = \frac{n(1 - \lambda)}{X - 1} + \frac{n\lambda}{X}$$

D'après la question 3.a) les coefficients qui apparaissent dans cette décomposition en éléments simples sont des entiers naturels (ce sont les multiplicités des racines). On en déduit que nécessairement $n\lambda \in \mathbb{N}$ et $n(1 - \lambda) \in \mathbb{N}$ ce qui implique que $\lambda \in \left\{ \frac{k}{n} ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$. De plus, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les vecteurs propres associées à $\lambda = \frac{k}{n}$ sont de la forme

$$P = \alpha X^k (X - 1)^{n-k}$$

— Synthèse : Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P = X^k(X - 1)^{n-k}$. D'après 3.a),

$$\frac{P'}{P} = \frac{k}{X} + \frac{n-k}{X-1} = \frac{nX-k}{X(X-1)} = \frac{n(\lambda-X)}{X(1-X)}$$

où $\lambda = \frac{k}{n}$. On en déduit par 3.b) que P est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En conclusion, $\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{k}{n} ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ (ce que l'on pouvait voir directement sur la matrice de φ obtenue à la question 2)) et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \text{Vect}(X^k(X-1)^{n-k})$$

4. D'après ce qui précède, φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Il a $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, on en déduit que φ est diagonalisable.

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

5. a) La variable aléatoire Z_2 ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1. On a donc $Z_2(\Omega) \subset \{0, 1\}$. De plus l'événement $(Z_2 = 0)$ correspond au fait que l'on tire au deuxième tirage la même boule qu'au premier tirage. On en déduit que $P(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}$. Plus rigoureusement,

$$(Z_2 = 0) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{i=1}^n (X_1 = i) \cap (X_2 = i)$$

On en déduit par indépendance des variables X_i que

$$P(Z_2 = 0) = \sum_{i=1}^n P((X_1 = i) \cap (X_2 = i)) = \sum_{i=1}^n P(X_1 = i) \times P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

De plus, $P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) = \frac{n-1}{n}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Sous l'hypothèse que l'événement $(Y_k = j)$ est réalisé, la variable aléatoire Z_{k+1} vaudra 1 si le $k+1$ -ème tirage apporte une des $n-j$ boules qui n'a pas encore été tirée. C'est-à-dire $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n}$.

Là encore, si on veut un rédaction plus rigoureuse, on note A_j l'ensemble des k -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\text{Card}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = j$. On a alors

$$P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \frac{P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = j))}{P(Y_k = j)}$$

Or

$$(Y_k = j) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_j} \bigcap_{i=1}^k (X_i = \alpha_i)$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$P(Y_k = j) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_j} \frac{1}{n^k}$$

De plus

$$(Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = j) = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_j} \bigcup_{\beta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} \left(\bigcap_{i=1}^k (X_i = \alpha_i) \cap (X_{k+1} = \beta) \right)$$

Là encore, en utilisant que les variables X_i sont indépendantes on obtient que

$$P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = j)) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_j} \sum_{\beta \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} \frac{1}{n^{k+1}} = \frac{n-j}{n} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A_j} \frac{1}{n^k}$$

Finalement, en faisant le quotient, $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n}$.

On utilise alors la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements $(Y_k = j)_{1 \leq j \leq k}$:

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^k P(Y_k = j) \times P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{n-j}{n} P(Y_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^k P(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k j P(Y_k = j) \\ &= 1 - \frac{1}{n} E(Y_k) \end{aligned}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_k) = E\left(\sum_{j=1}^k Z_j\right) = \sum_{j=1}^k E(Z_j) = \sum_{j=1}^k P(Z_j = 1)$$

La dernière égalité vient du fait que Z_j est une variable de Bernoulli qui ne prend que les valeurs 0 et 1. La formule de la question précédente devient alors :

$$P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k P(Z_j = 1).$$

d) Montrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}^*$ que : $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

— $\boxed{\text{I}}$: Pour $k = 1$, $P(Z_1 = 1) = 1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^0$ par définition.

— \square **H** : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour tout $j \leq k$, $P(Z_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k P(Z_j = 1) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \end{aligned}$$

— \square **C** : par récurrence forte, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

e) Si $k \geq 1$,

$$E(Y_k) = n(1 - P(Z_{k+1} = 1)) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

Si $k = 0$, $Y_0 = 0$ et donc $E(Y_0) = 0$. La formule ci-dessus reste vraie.

6. a) Par définition de Y_0 , $G_0 = 1$.

On voit que la variable Y_1 prend la valeur 1 de manière certaine donc $G_1 = X$.

La variable Y_2 prend ses valeurs dans $\{1, 2\}$, de plus $P(Y_2 = 2) = P(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}$. On en déduit que $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{n}$ et donc $G_2 = \frac{1}{n}X + \frac{n-1}{n}X^2$.

b) Soit k dans \mathbb{N} et i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On utilise le système complet d'événements $((Y_k = j)_{0 \leq j \leq n})$. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(Y_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^n P((Y_k = j) \cap (Y_{k+1} = i))$$

On remarque alors que si $j \notin \{i, i-1\}$, $P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = j)) = 0$ car le nombre de numéros différents ne peut augmenter que de 0 ou 1 lors du $k+1$ -ème tirage.

De plus, d'après la question 5)b),

$$P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = i-1)) = P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = i-1)) = \frac{n - (i-1)}{n} P(Y_k = i-1)$$

et

$$P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = i)) = P(Y_k = i) - P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = i)) = \left(1 - \frac{n-i}{n}\right) P(Y_k = i)$$

Finalement,

$$P(Y_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P(Y_k = i-1).$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 G_{k+1} &= \sum_{i=0}^n P(Y_{k+1} = i) X^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{i}{n} P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P(Y_k = i-1) \right] X^i \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i P(Y_k = i) X^i + \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Y_k = i) X^{i+1} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i P(Y_k = i) (X^i - X^{i+1}) + \sum_{i=0}^n P(Y_k = i) X^{i+1} \\
 &= \frac{1}{n} X(1-X) G'_k + X G_k
 \end{aligned}$$

d) On vient de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{k+1} = \varphi(G_k)$. On en déduit, pour tout k dans \mathbb{N} , $G_k = \varphi^k(G_0)$ par une récurrence immédiate.

7. a) Soit k dans \mathbb{N} .

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^n P(Y_k = i) 1^i = \sum_{i=0}^n P(Y_k = i) = 1$$

De même,

$$G'_k(1) = \sum_{i=0}^n i P(Y_k = i) 1^{i-1} = \sum_{i=0}^n i P(Y_k = i) = E(Y_k)$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On dérive la relation obtenue en 6.c)

$$G'_{k+1} = \frac{1}{n} (1 - 2X) G'_k + \frac{1}{n} X(1-X) G''_k + G_k + X G'_k$$

On évalue en 1

$$G'_{k+1}(1) = -\frac{1}{n} G'_k(1) + 0 + G_k(1) + G'_k(1)$$

En utilisant les relations de la question précédente,

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

c) La suite $(E(Y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On pose γ tel que

$$\gamma = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \gamma + 1$$

c'est-à-dire $\gamma = n$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $u_k = E(Y_k) - n$ est alors géométrique de raison $1 - \frac{1}{n}$. Comme $u_0 = -n$, on obtient que pour tout entier k ,

$$u_k = -n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

et donc

$$E(Y_k) = n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

8. Pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $P_j = X^j(1 - X)^{n-j}$.

a) En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j(1 - X)^{n-j} = (X + (1 - X))^n = 1 = G_0$$

b) Soit j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_j = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^k = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

en posant $i = k + j$.

c) Soit k dans \mathbb{N} , on veut calculer $\varphi^k(G_0)$. On a vu dans la partie I que (P_0, \dots, P_n) était une base de vecteurs propres pour φ de $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose donc

$$G_0 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$$

Par linéarité,

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \varphi^k(P_j) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

En utilisant finalement la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned} \varphi^k(G_0) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i \end{aligned}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de $G_k = \varphi^k(G_0)$, on en déduit que pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(Y_k = i) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

Or

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

On en déduit

$$P(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$