

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. Justifier que si $P \in \mathbb{C}_n[X]$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Ainsi, φ qui est linéaire est un endomorphisme de E .
2. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. a) Soit P un polynôme non nul que l'on note $P = \alpha \prod_{i=1}^m (X - a_i)^{r_i}$. Rappeler la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$.
b) Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\varphi(P) = \lambda P \iff \frac{P'}{P} = \frac{n(\lambda - X)}{X(1-X)}$$

- c) En déduire les valeurs propres et les espaces propres de φ .
4. Justifier que φ est diagonalisable.

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernable au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note alors pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages¹.

Par convention, on pose $Y_0 = 0$.

5. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k -ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon².
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.
a) Déterminer la loi de Z_2 .
b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1)$.
En déduire : $P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.

1. On peut, plus sérieusement, considérer $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, puis noter pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k : \omega \mapsto \text{Card}\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\}$.

2. On peut définir Z_k comme l'indicatrice de l'événement $\{\omega \in \Omega, X_k(\omega) \notin \{X_1(\omega), \dots, X_{k-1}(\omega)\}\}$.

- c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$, montrer :

$$P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k P(Z_j = 1).$$

- d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
- e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k .
6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n P(Y_k = i) X^i.$$

- a) Déterminer les polynômes G_0 , G_1 et G_2 .
- b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(Y_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P(Y_k = i-1).$$

- c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X)G'_k + XG_k.$$

- d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

7. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.
- b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

- c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 5.e).

8. Pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $P_j = X^j(1-X)^{n-j}$.

- a) Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$.

- b) Montrer, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

- c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

- d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$