Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) \geqslant 0$ (car $\zeta(x) > 1 > 0$)
   De plus, dans $[0, +\infty]$;
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)}\zeta(x) = 1$$
   On en déduit la formule donnée définie bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} P(X \in a\mathbb{N}^*) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X = ka)\right) \quad \text{(par définition de } a\mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka) \quad \text{(événements incompatibles)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x}\zeta(x) = \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

Partie II

3. Par définition, pour monter que la famille $((X = p_i\mathbb{N}^*))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants, il faut montrer que pour toute sous famille $(i_1, ..., i_r)$ d'éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, $P(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^r P(X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)$
   On considère donc $(i_1, ..., i_r)$ des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$. On sait que pour $\omega \in \Omega$,
$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in [\![1, k]\!], \ \ \omega \in (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*) \\ &\iff \forall k \in [\![1, k]\!], p_{i_k} | X(\omega) \\ &\iff \left(\prod_{i=1}^k p_{i_k}\right) | X(\omega) \quad \text{(car les } p_i \text{ sont premiers entre eux)} \\ &\iff \omega \in (X \in a\mathbb{N}^*) \quad (\text{où } a = \prod_{k=1}^r p_{i_k}) \end{aligned}$$
   On en déduit que
$$P\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)\right) = P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x} = \left(\prod_{k=1}^r p_{i_k}\right)^{-x} = \prod_{k=1}^r p_{i_k}^{-x} = \prod_{i=1}^r P(X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)$$
   On a bien montré que la famille $((X = p_i\mathbb{N}^*))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants.

4. Par continuité décroissante, on a
$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \omega \in (X \notin p_k\mathbb{N}^*) \\
&\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k \not| X(\omega) \\
&\iff \forall p \in \mathscr{P}, \quad p \not| X(\omega) \\
&\iff X(\omega) = 1
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = P(X=1).$$

Par suite, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(x)} = P(X=1) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) \quad \text{(indépendance prouvée à la question 3)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) \quad \text{(d'après la question 2).}
\end{aligned}$$

5. On veut calculer $\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x)$. On remarque que la fonction ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$. En effet, soit $1 < x \leqslant y$, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^x} \geqslant \frac{1}{n^y}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^y}$.
En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient bien que $\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$.
On en déduit que ζ admet une limite notée $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1^+.
De plus, pour tout entier n et tout $x \in]1,+\infty[$, $\zeta(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$. En faisant tendre x vers 1^+ on en déduit que $\ell \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ et d'utiliser que la série harmonique diverge pour obtenir que

$$\lim_{x\to1^+} \zeta(x) = \ell = +\infty$$

Tous les termes étant strictement positifs et la fonction ln étant continue, la formule prouvée à la question 4) devient :

$$\forall x \in]1,+\infty[, -\ln(\zeta(x)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

Supposons par l'absurde que la série $\sum\limits_{k\geqslant1} \frac{1}{p_k}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes négatifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant1} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge aussi car $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$. Posons $f_k : x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$ définie sur $]1,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{p_k^x}$ est décroissante donc f_k est croissante. En voyant alors que f_k est à valeurs négatives, on obtient que $|f_k| = -f_k$ est décroissante. On en déduit que

$$||f_k||_{\infty,]1,+\infty[} = \lim_{x\to1^+} f_k(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Cela montre que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 1} f_k$ converge normalement donc uniformément au voisinage de 1. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) = \lim_{x\to 1^+} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to 1^+} -\ln(\zeta(x)) = -\infty$$

La dernière égalité venant de la limite prouvée en début de question.
C'est donc absurde ; cela prouve que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

Partie III

6. a) On considère donc $(i_1, ..., i_r)$ des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$.

$$C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_r} = ((X \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \cdots (X \in p_{i_r}\mathbb{N}^*)) \cap ((Y \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \cdots (Y \in p_{i_r}\mathbb{N}^*))$$

En utilisant que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puis en utilisant les résultats de la question 3), on obtient

$$\begin{aligned} P(C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_r}) &= P\left((X \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \cdots (X \in p_{i_r}\mathbb{N}^*)\right) \times P\left((Y \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \cdots (Y \in p_{i_r}\mathbb{N}^*)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{r} P(X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*) \times \prod_{k=1}^{r} P(Y \in p_{i_k}\mathbb{N}^*) \\ &= \prod_{k=1}^{r} P(C_{i_k}) \end{aligned}$$

Cela montre que les événement $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants.

b) On voit alors que

$$A = \bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{(X \in p\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p\mathbb{N}^*)} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{C_k}$$

c) On a montré à la question 6.a) que les événement $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants, les complémentaires $(\overline{C_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont aussi indépendants. D'après la propriété de la continuité décroissante, on a :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{C_k}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{C_k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{C_k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P\left(C_k\right)\right)$$

Or

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - P\left(C_k\right)\right) \overset{\text{indep.}}{=} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)P(Y \in p_k\mathbb{N}^*)\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right)$$

Finalement, en utilisant la question 4)

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

Partie IV

7. Par définition du PGCD, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$W_n(\omega) \in k\mathbb{N}^* \iff k \mid U_n(\omega) \wedge V_n(\omega) \iff (k \mid U_n(\omega) \text{ et } k \mid V_n(\omega))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= P((U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*)) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)P(V_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes}) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (\text{même loi}). \end{aligned}$$

Or, les entiers j de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leqslant ki \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n/k \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).
On a donc $\{j \in [\![1, n]\!]\ ,\ k \mid j\} = \{ki\ ,\ \ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}$.
Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, on obtient :

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\text{Card}\{ki\ ,\ \ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}}{\text{Card}[\![1, n]\!]}\right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

8. a) Soit $\omega \in \Omega$,

$$\omega \in (W_n = 1) \iff W_n(\omega) = 1 \iff \forall p_i \in \mathscr{P}, p_i \nmid W_n(\omega)$$

On en déduit que ω n'appartient pas à $(W_n = 1)$ si et seulement s'il existe un nombre premier qui divise $W_n(\omega)$. Cela signifie

$$\overline{(W_n = 1)} = \bigcup_{p \in \mathscr{P}} (W_n \in p\mathbb{N}^*) = \bigcup_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant n}} (W_n \in p\mathbb{N}^*)$$

La deuxième égalité venant du fait que pour tout $\omega \in \Omega$, U_n et V_n sont inférieurs à n et donc leur PGCD aussi.

b) Notons d l'entier tel que p_d soit le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n. On a par la formule du crible

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{d} (W_n \in p_i\mathbb{N}^*)\right) = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} P\left((W_n \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \cdots \cap (W_n \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)\right)$$

On en déduit que

$$P(W_n = 1) = 1 + \sum_{k=1}^{d} (-1)^k \sum_{k \in A(n,k)} (W_n \in k\mathbb{N}^*)$$

où $A(n, k)$ est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme un produit de k nombres premiers deux à deux distincts inférieurs à n. On en déduit que

$$P(W_n = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2$$

en remarquant

— Le terme pour $k = 1$ de la somme de droite vaut 1, car 1 est le produit de 0 nombres premiers.

— Les termes de la somme de droite pour l'indice k où k est divisible par un nombre premier strictement supérieur à n sont nuls car dans ce cas, $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ est nul.

c) Pour tout entier k non nul, on pose $f_k : n \mapsto \frac{1}{n^2}\mu(k)\left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor\right)^2$. En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_k(n)| \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{k^2}$$

On en déduit que $||f_k||_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. Elle converge donc uniformément sur $\mathbb{N}$. Appliquons alors le théorème de la double limite :

— Pour tout $k \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \frac{\mu(k)}{k^2}$ puisque

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{k}-1\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2 \leqslant \frac{1}{k^2}$$

— La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} f_k$ converge uniformément au voisinage de $+\infty$

On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mu(k)}{k^2}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k)\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n = k) \in [0,1]$, donc $\ell_k = \lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) \in [0,1]$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose cette fois $g_k : n \mapsto P(W_n = k)$.

— La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} g_k$ converge simplement vers $S : n \mapsto 1$ car pour tout entier n, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(W_n = k) = 1$.

— Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} g_k(n) = \ell_k$.

— Il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur $\mathbb{N}^*$ vers S puisqu'il y a convergence normale car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_k(n)| \leqslant P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad ||g_k||_\infty \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Le théorème de double limite affirme alors que

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$$

On a donc $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, en encadrant comme à la question 8.c) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n \to +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{(propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\
&= \frac{1}{k^2} \\
&= P(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{ où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 2)}
\end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, la variable W suit une loi zêta de paramètre 2.
On a alors $\ell_1 = P(W = 1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(2)1^2} = \dfrac{1}{\zeta(2)}$.
Or,

$$P(W = k) = \lim_{n \to +\infty} P(W_n = 1) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $[\![1, n]\!]$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers $\dfrac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{culture}}{=} \dfrac{1}{\pi^2/6} = \dfrac{6}{\pi^2}$.