Devoir libre 8

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Toutes les variables aléatoires seront définie cet espace probabilisé.
On admet la formule du crible. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathscr{P}$ est infini.
On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.
Pour tout réel $x > 1$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge. On note $\zeta(x)$ sa somme.

Partie I

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Justifier qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$, montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.
   N.B. L'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ pourra aussi être noté $(a|X)$ ("a divise X"), mais on se gardera alors de croire que $P(a|X)$ désigne une probabilité conditionnelle.

Partie II

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.

3. Montrer que la famille $((X \in p_i\mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n) = P(X = 1)$. En déduire que
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

5. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} \zeta(x)$ et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{p_n}$

Partie III

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k l'événement

$$C_k = (X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*).$$

6. a) Montrer que $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants.

   b) Exprimer l'événement A à l'aide des événements $\overline{C_k}$.

   c) En déduire que

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

Partie IV

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On note $W_n = U_n \wedge V_n$. Cela signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $W_n(\omega)$ est le PGCD de $U_n(\omega)$ et de $V_n(\omega)$.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$.

8. a) Justifier que $\overline{(W_n = 1)} = \bigcup_{p_i \in \mathscr{P}} (W_n \in p_i\mathbb{N}^*)$.

   b) En déduire que

$$P(W_n = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2$$

   où $\mu(k)$ vaut 0 si k est divisible par un carré et vaut $(-1)^i$ si k est le produit de i nombres premiers deux à deux distincts.

   c) Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

   On pourra poser $f_k(n) = \frac{1}{n^2}\mu(k)\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2$ et appliquer, en le justifiant, le théorème de la double limite

On admet que, de même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

9. Montrer que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. *Même conseil qu'en 8)c)*

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode ci-dessus, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $P(W \in B) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat. Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y suivent la même loi de probabilité.

10. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?