Partie I

1. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ pour N entier naturel tel que $N > p$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) - \sum_{n=1}^{N} \varphi(n+p) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) - \sum_{n=p+1}^{p+N} \varphi(n) = \boxed{\sum_{n=1}^{p} \varphi(n) - \sum_{n=N+1}^{p+N} \varphi(n)}$$

b) Comme p est fixé, $\sum\limits_{n=1}^{p} \varphi(n)$ est une constante. De plus $\sum\limits_{n=N+1}^{p+N} \varphi(n) = \sum\limits_{n=1}^{p} \varphi(n+N)$ est une somme **finie** de $p+N-(N+1)+1 = p$ termes qui tendent tous vers 0 quand N tend vers $+\infty$ car φ est limite nulle en $+\infty$. Cela montre que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(p) = \sum\limits_{n=1}^{p} \varphi(n)$.

Par définition, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(p)$ est convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(p) = \sum\limits_{n=1}^{p} \varphi(n)}$.

2. a) La fonction $x \longmapsto x+n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $[n, +\infty[\subset [1, +\infty[$, intervalle sur lequel φ est décroissante, donc $x \longmapsto \varphi(x+n)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et ainsi $x \longmapsto -\varphi(x+n)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi l'application $x \longmapsto u_n(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$; elle y est positive car φ étant décroissante, $u_n(x) = \varphi(n) - \varphi(n+x) \geqslant 0$.

Et donc : $\forall x \in [0, p]$, $|u_n(x)| = u_n(x) \leqslant u_n(p)$, et finalement, $\boxed{\|u_n\|_{\infty,[0,p]} = u_n(p)}$.

b) On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|u_n\|_{\infty,[0,p]}$ est convergente. Cela montre que la série de fonctions $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } [0,p]}$.

c) Pour tout entier naturel n, la fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$ de plus la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[0, p]$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On en déduit que la somme $\boxed{U \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$.

d) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned}
U(x+1) - U(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) - \varphi(n+x+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) - \varphi(n+x) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) - \varphi(n+x+1) - (\varphi(n) - \varphi(n+x)) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi(n+x) - \varphi(n+x+1) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \varphi(x+1) - \varphi(N+x+1)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi(N+x+1) = 0$, $\boxed{U(x+1) - U(x) = \varphi(x+1)}$

3. Comme U est une somme (infinie) de fonctions croissantes, elle est croissante. En effet pour x, y dans $]0,+\infty[$ avec $x \leqslant y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \leqslant u_n(y)$. On en déduit que

$$U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) = U(y)$$

La fonction U est bien croissante. De plus, φ étant décroissante, $-\varphi$ est croissante. On en déduit que $\boxed{f_0 \text{ est croissante}}$.

La fonction $\boxed{f_0 \text{ est continue}}$ en tant que somme de fonctions continues.

Enfin, pour $x > 0$, $f_0(x+1) - f_0(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) + U(x+1) - U(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) + \varphi(x+1)$.

Finalement $f_0(1) = \lambda - \varphi(1) + U(1) = \lambda - \varphi(1) + \varphi(1)$ par 1) b), donc $\boxed{f_0(1) = \lambda}$.

Le résultat est acquis.

4. a) Soit $x > 0$, $g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) - (f_0(x+1) - f_0(x)) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ car f vérifie $S(\lambda, \varphi)$, et f_0 également par 3), donc g est 1-périodique.

   b) Soit p un entier naturel non nul. Comme f vérifie $S(\lambda, \varphi)$, : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) - f(n) = \varphi(n)$; on somme de $n = 1$ à $n = p - 1$

$$\sum_{n=1}^{p-1} (f(n+1) - f(n)) = \sum_{n=1}^{p} f(n) - \sum_{n=1}^{p-1} f(n) = f(p) - f(1) = f(p) - \lambda = \sum_{n=1}^{p-1} \varphi(n)$$

   D'où $\boxed{f(p) = \lambda + \sum\limits_{n=1}^{p-1} \varphi(n) = f_0(p)}$ car f_0 vérifie les mêmes propriétés que f.

   c) Soit $x \in]0,1]$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   Comme g est $1-$périodique, $g(x) = g(x+p.1) = g(x+p) = f(x+p) - f_0(x) \leqslant f(p+1) - f_0(p+1)$ car : $p < p + x \leqslant p + 1$, f est croissante et $-f_0$ est décroissante.

   Par 4.b), $f(p+1) - f_0(p) = \left(\lambda + \sum\limits_{n=1}^{p} \varphi(n)\right) - \left(\lambda + \sum\limits_{n=1}^{p-1} \varphi(n)\right) = \varphi(p)$ et donc le résultat est acquis.

   On a $-g(x) = -g(x+p) = f_0(x+p) - f(x)$; comme f et f_0 vérifient les mêmes propriétés, on peut appliquer le résultat ci-dessus, et donc $-g(x) \leqslant \varphi(p)$. On en déduit $-\varphi(p) \leqslant g(x)$.

   d) Soit $x \in]0,1]$ fixé et $p \in \mathbb{N}^*$, $|g(x)| \leqslant \varphi(p)$ d'après la question précédente.

   On faire tendre p vers $+\infty$ à x fixé pour obtenir que $|g(x)| \leqslant 0$, d'où $g(x) = 0$.

   $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc nulle sur }]0,1]}$.

   Soit $x \in]0,+\infty[$, on note $\lceil x \rceil$ sa partie entière supérieure. On a donc $x - \lceil x \rceil \in]-1,0]$ et donc $x + 1 - \lceil x \rceil \in]0,1]$. Par 1-périodicité de g,

$$g(x) = g\left(x + 1 - \lceil x \rceil\right) = 0$$

   La fonction $\boxed{g \text{ est bien identiquement nulle sur }]0,+\infty[}$.

Partie II

5. La fonction U est continue sur $[0,+\infty[$ donc admet une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle par le théorème fondamental de l'analyse.

   On a pour tout $x \geqslant 0$, $\delta(x) = \psi(x+1) - F(x+1) + F(x)$. Donc δ est de classe $\mathscr{C}^1$ par les théorèmes sur les composées, sommes et différences de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

On a pour tout $x \geqslant 0$,

$$\delta'(x) = \psi'(x+1) - U(x+1) + U(x) = \psi'(x+1) - \varphi(x+1) = 0$$

d'après la question 2.d). On en déduit que $\boxed{\delta \text{ est constante sur } [0, +\infty[}$.

6. a) La fonction g_μ est continue donc elle admet une unique primitive G_μ telle que $G_\mu(1) = \mu$.
   Par le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $x > 0$,

$$G_\mu(x) = \lambda + \int_1^x g_\mu(t)dt = \lambda + \int_1^x (\mu - \psi'(t) + U(t))dt = \lambda + \mu.(x-1) - (\psi(x) - \psi(1)) + \int_1^x U(t)dt$$

   b) Soit $x > 0$

$$G_\mu(x+1) - G_\mu(x) = \mu - \psi(x+1) + \psi(x) + \int_x^{x+1} U(t)dt = \mu + \psi(x) - \delta(x)$$

   c) On sait par definition que $G_\mu(1) = \lambda$. Comme δ est constante de valeur $\delta(0)$, G_μ est solution de $S(\lambda, \psi)$ si et seulement si $\mu - \delta(0) = 0$. On pose donc $\boxed{\mu_0 = \psi(1) - \int_0^1 U}$.

7. Soit $x > 0$

   a) On vient de voir que la fonction G_{μ_0} vérifie $S(\lambda, \psi)$ et que sa dérivée g_{μ_0} est croissante. Comme de plus g_{μ_0} est continue, G_μ est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Réciproquement, soit G une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, à dérivée croissante et vérifiant $S(\lambda, \psi)$.
   Alors, G' vérifie $G'(x+1) - G'(x) = \varphi(x)$ donc vérifie $S(\mu, \varphi)$ avec $\mu = G'(1)$.
   De plus G' croît. Ainsi $G' = g_\mu$ d'après la partie I. Enfin, G est la primitive de G' valant λ en 1. Donc $G = G_\mu$.
   D'après la question précédente, $\mu = \mu_0$ et donc $G = G_{\mu_0}$.

   b)

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= G_{\mu_0}(x) \\
&= \lambda + \mu_0.(x-1) - (\psi(x) - \psi(1)) + \int_1^x U(t)dt \\
&= \lambda + \left(\psi(1) - \int_0^1 U\right)(x-1) - (\psi(x) - \psi(1)) + \int_0^x U - \int_0^1 U \\
&= \lambda + x\left(\psi(1) - \int_0^1 U\right) - \psi(x) + \int_0^x U
\end{aligned}$$

8. a) Soit $x > 0$ D'après la question 2.b), la série de fonctions continues $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, x] \subset [0, p]$ où $p = \lceil x \rceil$.
   On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^x U = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u_n$$

   De plus, $\int_0^x u_n = x\psi'(n) - \int_0^x \psi'(n+t)dt = x\psi'(n) - \psi(n+x) + \psi(n)$ car $t \mapsto \psi(n+t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.

   On obtient bien que $\boxed{\int_0^x U = \sum_{n=1}^{\infty} x\psi'(n) - \psi(n+x) + \psi(n)}$.

b) Soit $x>0$

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \mu_0-\psi'(x)+U(x)\\
&= \psi(1)-\int_0^1 U-\psi'(x)+U(x)\\
&= \psi(1)-\psi'(x)-\sum_{n=1}^{\infty}(\psi'(n)-\psi(n+1)+\psi(n))+\sum_{n=1}^{\infty}(\psi'(n)-\psi'(n+x))\\
&= \psi(1)-\psi'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\psi(n+1)-\psi(n)-\psi'(n+x))
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \lambda-\psi(x)+x\psi(1)-x\sum_{n=1}^{\infty}[\psi'(n)-\psi(n+1)+\psi(n)]+\sum_{n=1}^{\infty}[x\psi'(n)-\psi(n+x)+\psi(n)]\\
&= \lambda-\psi(x)+x\psi(1)+\sum_{n=1}^{\infty}[-x(\psi'(n)-\psi(n+1)+\psi(n))+x\psi'(n)-\psi(n+x)+\psi(n)]\\
&= \lambda-\psi(x)+x\psi(1)+\sum_{n=1}^{\infty}[x(\psi(n+1)-\psi(n))-\psi(n+x)+\psi(n)]
\end{aligned}$$

Partie III

9. On voit que
$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ converge absolument ; elle est donc convergente.

10. Remarquons que, puisque exp et ln sont de classe $\mathscr{C}^1$, les conditions de l'énoncé sont équivalentes à $\ln\circ\Gamma$ de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\begin{cases}\forall x>0,\ \ln(\Gamma(x+1))-\ln(\Gamma(x))=\ln x\\ \ln(\Gamma(1))=0\\ (\ln\circ\Gamma)' \text{ croissante}\end{cases}$$
Posant $\psi=\ln$, la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et à dérivée $x\mapsto\frac{1}{x}$ décroissante. Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, il existe donc une unique fonction f_1 dérivable à dérivée croissante vérifiant $S(0,\ln)$ d'après la question 7.a).
Finalement, on a l'existence et l'unicité de la fonction Γ de l'énoncé, en posant $\Gamma=\exp\circ f_1$.

11. D'après la question 9), on a pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma(x)) &= 0+x\ln 1-\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+x)+x(\ln(n+1)-\ln n)) \qquad (*)\\
&= -\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or
$$-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{x}{n}+x\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$$

Les séries de termes généraux $-\ln(1+\frac{x}{n})+x\ln(1+\frac{1}{n})$ et $\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}$ convergent donc celle de terme général $-\ln(1+\frac{x}{n})+\frac{x}{n}$ converge également. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma(x)) &= -\ln x + x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{x}{n}\right) \\
&= -\ln x - \gamma.x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right) \\
&= -\ln x - \gamma.x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \exp(-\ln\Gamma(x)) \\
&= xe^{\gamma x}\exp\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) \\
&= xe^{\gamma x}\lim_{N\to\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) \\
&= xe^{\gamma x}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}
\end{aligned}$$

Reprenons la formule $(*)$:

$$\begin{aligned}
\ln(\Gamma(x)) &= -\ln x + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\ln n - \ln(n+x) + x(\ln(n+1)-\ln n)) \\
&= -\ln x + \lim_{N\to\infty}\left(\ln(N!)-\sum_{n=1}^{N}\ln(n+x)+x\ln(N+1)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\ln(N!)-\sum_{n=0}^{N}\ln(n+x)+x\ln(N+1)\right)
\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$\Gamma(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{N!(N+1)^x}{\prod\limits_{n=0}^{N}(x+n)}$$

D'où le résultat demandé en remarquant que :

$$(N+1)^x \underset{N\to\infty}{\sim} N^x$$

12. a) Posant $v_n(x)=\ln(n+x)-\ln n-\frac{x}{n}$ (pour $n\geqslant 1$ et $x\geqslant 0$), on a $v_n'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}=-\frac{x}{n(n+x)}$.
Soit $a\in]0,+\infty[$.
Pour tout $x\in[0,a]$, $|v_n'(x)|\leqslant\frac{a}{n^2}$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant1}v_n'$ converge normalement sur $[0,a]$

Comme les fonctions v_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge sur $[0,+\infty[$, sa somme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est $x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'(x)$.
De plus ln est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ainsi que $x\mapsto \gamma x$.
Donc $\ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$,

$$(\ln\circ\Gamma)'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$$

b) Pour tout $n\geqslant 1$, v_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et pour $x>0$, $v_n''(x) = -\frac{1}{(n+x)^2}$. En particulier, $||v_n||_\infty = \frac{1}{n^2}$.
La série de terme général v_n'' converge normalement sur $]0,+\infty[$ et les v_n' sont de classe $\mathscr{C}^1$. On en déduit que $\ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que pour tout $x>0$,

$$(\ln\circ\Gamma)''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$$

13. Avec les notations de l'énoncé, pour $x>0$ et $t>0$,

$$h_0(x,t) = t^{x-1}e^{-t};\, h_1(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t} \text{ et } h_1(x,t) = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$$

On remarque alors que

$$h_1(x,t) = \sqrt{h_0(x,t)}\sqrt{h_0(x,t)}\ln t$$

d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_a^b h_1(x,t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \sqrt{h_0(x,t)}^2 dt\right)\left(\int_a^b \sqrt{h_0(x,t)}^2 (\ln t)^2\, dt\right) = \left(\int_a^b h_0(x,t)dt\right)\left(\int_a^b h_2(x,t)dt\right)$$

En faisant tendre a vers 0^+ et b vers $+\infty$ (toutes les intégrables convergent), on obtient que $H'(x)^2 \leqslant H(x)H''(x)$.
Comme $(H'/H)' = \frac{H''H-H'^2}{H^2}$, on en déduit que $(H‘/H)'\geqslant 0$ c'est-à-dire que (H'/H) croît.

14. On voit que $H(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$, et pour tout $x>0$, par intégration par parties,

$$H(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}xt^{x-1}dt = xH(x)$$

car le crochet converge et vaut 0.
D'après l'unicité prouvée à la question 10), $H=\Gamma$.

15. On considère la fonction Z définie sur $]0,+\infty[$ par

$$Z : x\mapsto \frac{2^{x-1}}{H(\frac{1}{2})}H\left(\frac{x}{2}\right)H\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On va montrer que $Z=H$ en montrant que Z vérifie encore les conditions de la question 10.
Pour commencer

$$Z(1) = \frac{2^0}{H(\frac{1}{2})}H\left(\frac{1}{2}\right)H\left(1\right) = H(1) = 1$$

De

$$\begin{aligned}
Z(x+1) &= \frac{2^x}{H(\frac{1}{2})} H\left(\frac{x+1}{2}\right) H\left(\frac{x+2}{2}\right) \\
&= \frac{2^x}{H(\frac{1}{2})} H\left(\frac{x+1}{2}\right) H\left(\frac{x}{2}+1\right) \\
&= \frac{2^x}{H(\frac{1}{2})} H\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} H\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= xZ(x)
\end{aligned}$$

Pour finir, pour $x > 0$,

$$\ln(Z(x)) = x\ln(2) - \ln \circ H\left(\frac{1}{2}\right) + \ln \circ H\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \circ H\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

En dérivant, on obtient que

$$\frac{Z'(x)}{Z(x)} = \ln(2) + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Cela montre que $\frac{Z'}{Z}$ est croissante comme somme de fonctions croissantes.
Par unicité, $Z = H$.