Devoir surveillé 3

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ce problème a pour objectif l'étude des fonctions $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations

$$S(\lambda, \varphi) : \begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) - f(x) = \varphi(x) \\ f(1) = \lambda \end{cases}$$

où λ est un réel donné et $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

Partie I

On suppose dans cette partie que φ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application $u_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; u_n(x) = \varphi(n) - \varphi(n+x)$$

1. a) Soit $p \in \mathbb{N}$, pour N entier naturel tel que $N > p$, calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(p)$.

   b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(p)$ est convergente et donner sa somme.

2. a) Préciser les variations de l'application $x \longmapsto u_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.
   En déduire $\|u_n\|_{\infty,[0,p]}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0, p]$.

   Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note U sa fonction somme :
   $\forall x \in [0, +\infty[, \; U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

   c) Montrer que U est continue sur $[0, +\infty[$.

   d) Calculer, pour tout $x > 0$, $U(x+1) - U(x)$.

3. On pose pour tout $x > 0$, $f_0(x) = \lambda - \varphi(x) + U(x)$.
   Montrer que f_0 est croissante et continue sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie $S(\lambda, \varphi)$.

4. Soit f une fonction croissante sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $S(\lambda, \varphi)$. On pose $g = f - f_0$.

   a) Montrer que g est 1-périodique.

   b) Soit p un entier naturel non nul.
   Calculer $f(p)$ en fonction de λ, de $\varphi(1), \ldots, \varphi(p-1)$. Que vaut $f_0(p)$?

   c) Soit $x \in]0, 1]$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En observant que $g(x) = g(x+p)$, montrer que $g(x) \leqslant \varphi(p)$.
   On pourra utiliser la croissance de f et celle de f_0.
   Montrer de même que $-\varphi(p) \leqslant g(x)$.

   d) En déduire que g est identiquement nulle sur $]0, 1]$, puis sur $]0, +\infty[$.

   On a donc montré qu'il existait une unique fonction croissante vérifiant $S(\lambda, \varphi)$; c'est la fonction f_0 qui est alors continue.

Partie II

Soit $\psi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, telle que :
ψ' est décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi'(x) = 0$. On pose $\varphi = \psi'$.

Soit μ un réel donné.

On note g_μ l'unique fonction croissante et continue sur $]0,+\infty[$ vérifiant $S(\mu,\varphi)$, c'est-à-dire $S(\mu,\psi')$.

On a donc : $\forall x>0,\ g_\mu(x) = \mu - \psi'(x) + U(x)$ où $U : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \psi'(n) - \psi'(n+x)$.

5. Prouver que la fonction $\delta\ :\ x \longmapsto \psi(x+1) - \int_x^{x+1} U(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
   Calculer δ' et en déduire que δ est constante sur $[0,+\infty[$.
6. Soit G_μ l'unique primitive de g_μ sur $]0,+\infty[$ telle que $G_\mu(1) = \lambda$.
   a) Justifier l'existence de G_μ et exprimer $G_\mu(x)$ sous forme intégrale pour tout $x>0$.
   b) Calculer $G_\mu(x+1) - G_\mu(x)$ pour tout $x>0$: on fera intervenir la fonction δ.
   c) Montrer qu'il existe une unique valeur de μ telle que G_μ soit solution de $S(\lambda,\psi)$.
   On note μ_0 cette unique valeur de μ. Exprimer μ_0 en fonction de $\psi(1)$ et d'une intégrale.
7. a) Montrer qu'il existe une unique fonction f_1 de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} \forall x>0,\ f_1(x+1) - f_1(x) = \psi(x) \\ f_1(1) = \lambda \\ f_1' \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

   b) Exprimer, pour tout $x>0$, $f_1(x)$ à l'aide de $\lambda, \psi(1), \psi(x), \displaystyle\int_0^1 U(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^x U(t)dt$.
8. a) Montrer que pour tout $x>0$,

$$\int_0^x U(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(x\psi'(n) - \psi(n+x) + \psi(n) \Big)$$

   b) En déduire que pour tout $x>0$,

$$f_1'(x) = \psi(1) - \psi'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\psi(n+1) - \psi(n) - \psi'(n+x) \Big)$$

   et

$$f_1(x) = \lambda + x\psi(1) - \psi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\psi(n) - \psi(n+x) + x\big(\psi(n+1) - \psi(n)\big) \Big)$$

Partie III

9. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$ converge. On note γ sa somme.

10. Montrer qu'il existe une unique fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \Gamma(1) = 1 \\ \dfrac{\Gamma'}{\Gamma} \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

11. Etablir pour tout $x > 0$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \ln(\Gamma(x)) &= -\ln x - \gamma x - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big((1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}\Big) \\ \frac{1}{\Gamma(x)} &= xe^{\gamma x} \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \\ \Gamma(x) &= \lim_{N\to+\infty} \frac{N^x N!}{\prod\limits_{n=0}^{N}(x+n)} \end{aligned}$$

12. a) Donner la valeur de la dérivée de $\ln\circ\Gamma$ sous forme d'une somme de série.

    b) Prouver que la fonction $\ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et donner la valeur de sa dérivée seconde sous forme d'une somme de série.

13. On considère la fonction H définie sur $]0,+\infty[$ par

$$H : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

On admettra que H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x>0$,

$$H^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} h_k(x,t)dt$$

où pour tout $t>0$, $h_k(x,t)$ est la valeur en x de la derivée k-ième de $x\mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

a) Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0<a\leqslant b$ et $x\in]0,+\infty[$.
Montrer que

$$\Big(\int_a^b h_1(x,t)dt\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b h_0(x,t)dt\Big)\Big(\int_a^b h_2(x,t)dt\Big)$$

En déduire que $\dfrac{H'}{H}$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $H = \Gamma$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$H\left(\frac{1}{2}\right)H(x) = 2^{x-1}H\left(\frac{x}{2}\right)H\left(\frac{x+1}{2}\right)$$