Nom :

.... □0 □1

.... □0 □1

.... □0 □1

Presentation .... □0 □1

$\varphi \searrow 0$ et continue .... □0 □1

$u_n(x) = \varphi(n) - \varphi(n+x)$ .... □0 □1

1)a) $\sum_{n=1}^{N} u_n(p) = \varphi(1) + \dots + \varphi(p) - (\varphi(N+1) + \dots + \varphi(N+p))$. □0 □1

1)b) CV et somme $\varphi(1) + \dots + \varphi(p)$ .... □0 □1

2)a) $x \mapsto u_n(x)$ croît .... □0 □1

$||u_n|_{\infty,[0,p]} = u_n(p) = \varphi(n) - \varphi(n+p)$ .... □0 □1

2)b) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0,p]$ .... □0 □1

2)c) sa somme U est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. .... □0 □1

2)d) $U(x+1) - U(x) = \varphi(x+1)$ .... □0 □1

3) $f_0 = \lambda - \varphi + U$ croît sur $\mathbb{R}_+^*$ .... □0 □1

et $f_0(1) = \lambda$ par 1)b) .... □0 □1

et $f_0(x+1) - f_0(x) = \varphi(x)$ par 2)d) .... □0 □1

4)a) $g = f - f_0$ est 1-périodique .... □0 □1

4)b) $f(p) = \varphi(p-1) + \dots + \varphi(1) + \lambda$ .... □0 □1

idem pour $f_0(p)$ .... □0 □1

4)c) $g(x) = f(x+p) - f_0(x+p)$ .... □0 □1

$\leqslant f(1+p) - f_0(p)$ (si $0 < x \leqslant 1$) .... □0 □1

$= f(1+p) - f(p) = \varphi(p)$ .... □0 □1

et $\geqslant f(p) - f_0(1+p) = -\varphi(p)$ .... □0 □1

4)d) g est nulle sur $]0,1]$ .... □0 □1

.... □0 □1

ψ est $\mathcal{C}^1$ et $\pi' \searrow '$ .... □0 □1

g_μ unique solution croissante de $S(\mu, \psi')$ .... □0 □1

5) $\delta : x \mapsto \psi(x+1) - \int_x^{x+1} U$ est $\mathcal{C}^1$. .... □0 □1

$\delta'(x) = \psi'(x+1) - U(x+1) + U(x) = 0$ donc $\delta = cte$. .... □0 □1

6)a)G_μ primitive de $g_m u$ tq $G_\mu(1) = \lambda$ existe et $G_\mu(x) = \lambda + \int_1^x g_\mu$ .. □0 □1

6)b) $G_\mu(x+1) - G_\mu(x) = \mu + \psi(x) - \delta(x)$ .... □0 □1

$\mu_0 = \delta(x) = \delta(0) = \psi(1) - \int_0^1 U$ .... □0 □1

7)a) G_{μ_0} est $\mathcal{C}^1$ .... □0 □1

à dérivée g_μ croissante .... □0 □1

et vérifie $S(\lambda, \psi)$ par définition .... □0 □1

et c'est la seule telle fonction .... □0 □1

7)b) $f_1(x) = \lambda + \int_1^x g_{\mu_0}$ .... □0 □1

$= \lambda + x(\psi(1) - \int_0^1 U) - \psi(x) + \int_0^x U$ .... □0 □1

8)a) $\int_0^x U = \sum_{n=1}^{\infty} (x\psi'(n) - \psi(n+x) + \psi(n))$ .... □0 □1

par la CVN sur tout segment établie en 2)b) .... □0 □1

8)b) $f_1'(x) = \psi(1) - \psi'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi(n+1) - \psi(n) - \psi'(n+x))$ .... □0 □1

et $f_1(x) = \lambda + x\psi(1) - \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi(n) - \psi(n+x) + x(\psi(n+1) - \psi(n)))$. □0 □1

9) CV de la série $\sum \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$ car $O(1/n^2)$ .... □0 □1

10) Γ verifie... si $\ln \circ \Gamma$ verifie... 012 .... □0 □1

unicite 7.a avec $\lambda = 0$ et $\psi(x) = \frac{1}{x}$ .... □0 □1

existence .... □0 □1

11) $\ln(\Gamma(x)) = -\ln x - \gamma x - \sum_1^{\infty} \ln[(1 + x/n)e^{-x/n}]$ 0123 .... □0 □1

$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} (1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n}$ 0123 .... □0 □1

$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^x}{N!} \prod_{n=0}^{N} (x+n)$ 0123 .... □0 □1

car $(N+1)^x \sim N^x$ .... □0 □1

12.a) $(\ln \circ \Gamma)'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ .... □0 □1 car $(\sum \ln(n+x) - \ln(x) - \frac{x}{n})' = -\frac{x}{n(n+x)}$ 0 1

et $\sum -\frac{x}{n(n+x)}$ CN sur $[0,a]$ 0 1

12.b) $(\ln\circ\Gamma)''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ 0 1

car $(\sum \ln(n+x) - \ln(x) - \frac{x}{n})'' = \frac{1}{(n+x)^2}$ 0 1

et $\sum \frac{1}{(n+x)^2}$ CN sur $\mathbb{R}_+$ 0 1

13.a) $\left(\int_a^b h_1(x,t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b h_0(x,t)dt\right)\left(\int_a^b h_2(x,t)dt\right)$ 0 1

idee Cauchy-Schwarz 0 1

$h_1(x,t) = (lnt)t^{x-1}e^{-t}$ 0 1

$h_2(x,t) = (lnt)^2t^{x-1}e^{-t}$ 0 1

bonne gestion du signe de $\ln t$ 0 1

passage à la limite quand $a \to 0$ et $b \to \infty$ 0 1

$(\frac{H'}{H})' = \frac{H''H-(H')^2}{H^2}$ 0 1

Donc $\frac{H'}{H}$ croissante 0 1

13.b) $H(1) = 1$ 0 1

$H(x+1) = xH(x)$ par IPP 0 1

donc $H = \Gamma$ 0 1

13.c) idee de poser $Z : x \mapsto \frac{2^{x-1}H(x/2)H((x+1)/2)}{H(x)}$ 0 1

$Z(1) = 1$ 0 1

$Z(x+1) = xZ(x)$ 0 1

Z'/Z croissante 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... 0 1

.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1
.... ☐0 ☐1