

On se fixe un réel strictement positif ε pour les questions 1 et 2.

1. (a) La suite (f_n) convergeant uniformément vers f , on sait que $(f_n - f)$ converge uniformément vers la fonction nulle. On en déduit qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ soit bornée. De plus, la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq N}$ tend vers 0 donc, pour ε , il existe $N_1 \geq N$ tel que pour $n \geq N_1$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

- (b) Soit n et p deux entiers supérieurs à N_1 :

$$\|f_n - f_p\|_\infty = \|(f_n - f) + (f - f_p)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_p\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

De ce fait, pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \|f_n - f_p\|_\infty \leq 2\varepsilon$. En faisant alors tendre x vers a (et en utilisant que $X \mapsto |X|$ est continue), on obtient $|\ell_n - \ell_p| \leq 2\varepsilon$.

- (c) On en déduit en appliquant ce qui précède à $n = N_1$ que pour tout $p \geq N_1$, $|\ell_p - \ell_{N_1}| \leq 2\varepsilon$. Cela implique que $(\ell_n)_{n \geq N_1}$ est bornée puisqu'elle est à valeurs dans $[\ell_{N_1} - 2\varepsilon, \ell_{N_1} + 2\varepsilon]$. De ce fait, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour en déduire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente de (ℓ_n) .

On note $(\ell_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (ℓ_n) convergente et on note α sa limite

2. (a) Par définition, $(\ell_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ tend vers α . Donc, il existe M tel que $k \geq M$ implique que $|\ell_{\varphi(k)} - \alpha| \leq \varepsilon$. Posons N_2 un entier supérieur à N_1 et à $\varphi(M)$.

Soit $n \geq N_2$ tel que $n \in \varphi(\mathbb{N})$. Comme φ est strictement croissante, $n = \varphi(k)$ avec $k \geq M$ et donc

$$|\ell_n - \alpha| = |\ell_{\varphi(k)} - \alpha| \leq \varepsilon.$$

- (b) Soit $n \geq N_2$, il existe $p \in \varphi(\mathbb{N})$ tel que $p \geq N_2$ car $\varphi(\mathbb{N})$ n'est pas majorée. On en déduit que

$$|\ell_n - \alpha| = |(\ell_n - \ell_p) + (\ell_p - \alpha)| \leq |\ell_n - \ell_p| + |\ell_p - \alpha| \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

- (c) L'assertion prouvée ci dessus, signifie que (ℓ_n) converge vers α ¹

3. On veut maintenant montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha = \lim(\ell_n)$.

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ (ici $\varepsilon > 0$ est générique). D'après la question 1.a) il existe un entier A_1 tel que pour $n \geq A_1$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De même, comme (ℓ_n) converge vers α , il existe un entier A_2 tel que pour $n \geq A_2$, $|\ell_n - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un entier n_0 supérieur à A_1 et à A_2 .

Comme $\lim_{x \rightarrow a} f_{n_0} = \ell_{n_0}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in A$, $|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, pour $x \in A$ tel que $|x - a| \leq \eta$,

$$|f(x) - \alpha| = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}) + (\ell_{n_0} - \alpha)| \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| + |\ell_{n_0} - \alpha| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim(\ell_n)$.

1. On vient de montrer que la suite (ℓ_n) converge en n'utilisant que la propriété démontrée en 1.b) qui est que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour n, p des entiers supérieurs ou égaux à N , $|\ell_n - \ell_p| \leq \varepsilon$. Une telle suite s'appelle une suite de Cauchy. On a donc montré que dans \mathbb{R} toute suite de Cauchy converge; on dit que \mathbb{R} est complet.