Théorème de la double limite

Soit $A \subset \mathbf{R}$. On considère une suite de fonctions (f_n) définies de A dans $\mathbf{K}$ et $f \in \mathscr{F}(A, \mathbf{K})$. Soit a un point adhérent à A. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n admet une limite finie $\ell_n \in \mathbf{K}$ en a sur A.

ii) La suite (f_n) converge uniformément vers f.

On veut montrer que la suite (ℓ_n) admet une limite finie ℓ et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

On se fixe pour les questions 1. et 2. un réel strictement positif ε.

1. (a) Justifier qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N_1$, $f_n - f$ est bornée et $||f_n - f||_\infty \leqslant \varepsilon$.
   (b) Soit n et p sont deux entiers supérieurs à N_1. Montrer que $||f_n - f_p||_\infty \leqslant 2\varepsilon$ puis que $|\ell_n - \ell_p| \leqslant 2\varepsilon$.
   (c) Montrer que la suite (ℓ_n) est bornée et en déduire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente.

On note $(\ell_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (ℓ_n) convergente et on note α sa limite

2. (a) Justifier qu'il existe $N_2 \geqslant N_1$ tel que pour $n \geqslant N_2$, si $n \in \varphi(\mathbf{N})$ alors $|\ell_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
   (b) En déduire que pour $n \geqslant N_2$, $|\ell_n - \alpha| \leqslant 3\varepsilon$.
   (c) Montrer que (ℓ_n) converge.
3. En s'inspirant du théorème de continuité d'une limite uniforme, montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim(\ell_n)$.