Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels. On pose pour $(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2$, $\alpha_{n,m}=\frac{u_n u_m}{n+m}$.

1. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente alors la famille $(\alpha_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable.

Corrigé

Par définition, la famille $(\alpha_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si la famille $(|\alpha_{n,m}|)_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable.
On note $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ qui est un réel car la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est supposée absolument convergente. Comme pour $(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2$, $\frac{|u_m|}{n+m}\leqslant |u_m|$, dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}|\alpha_{n,m}|=\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{|u_m|}{n+m}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|\sum_{m=1}^{+\infty}|u_m|\leqslant S\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|=S^2<+\infty$$

On en déduit que la famille $(\alpha_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable.

2. On pose $u_n=\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

   (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Corrigé

Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge en utilisant le théorème des séries alternées.

- Pour tout $n\geqslant 1$, $\ln(n+1)>0$ donc la série est alternée.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
- La suite $\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante

Cela montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge

(b) Montrer que dans ce cas la famille $(\alpha_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Corrigé

Là encore on étudie la famille $(|\alpha_{n,m}|)_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$.
Dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2} |\alpha_{n,m}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+m)\ln(m+1)}$$

On fixe, $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_m = \frac{1}{(n+m)\ln(m+1)} \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{1}{m\ln(m)}$.
Utilisons alors une comparaison série-intégrale pour étudier la nature de la série $\sum\limits_{m\geqslant 2} \frac{1}{m\ln(m)}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Pour $m \geqslant 3$,

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{m\ln(m)} \leqslant \int_{m-1}^{m} \frac{dt}{t\ln(t)}$$

On en déduit que pour $N \geqslant 3$,

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(3)) = \int_3^{N+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{m=3}^{N} \frac{1}{m\ln(m)}$$

Cela montre que la série $\sum\limits_{m\geqslant 2} \frac{1}{m\ln(m)}$ diverge et donc, par comparaison pour les séries positives, la série $\sum\limits_{m\geqslant 2} v_m$ diverge. On en déduit que $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+m)\ln(m+1)} = +\infty$. Finalement

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2} |\alpha_{n,m}| = +\infty$$

La famille $(\alpha_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.