Exercice

1. On a $S_2 = X_1 + X_2$. On sait que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant que $((X_1 = i))_{i \geqslant 0}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
P(S_2 = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((S_2 = k) \cap (X_1 = i)) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X_1 = i) \cap (X_2 = k - i)) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) P(X_2 = k - i) \text{ car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \text{ et } P(X_2 = \ell) = 0 \text{ si } \ell < 0 \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \text{ d'après la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

On a montré que $S_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Montrons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$ que pour tout entier $N \geqslant 1$, $S_N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N)$.
— $\boxed{\text{I}}$ Pour $N = 1$ le résultat est direct car $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$.
— $\boxed{\text{H}}$ Soit $N \geqslant 1$. On suppose que $S_N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N)$. On voit que $S_{N+1} = S_N + X_{N+1}$. Comme S_N et X_{N+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions et qu'elles suivent toutes les deux des lois de Poisson, le calcul ci-dessus permet de montrer que $S_{N+1} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{N+1})$.
— $\boxed{\text{C}}$ Par récurrence, pour tout $N \geqslant 1$, $S_N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N)$.

2. Soit $n \geqslant 1$,
$$P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \frac{\lambda_n^0 e^{-\lambda_n}}{0!} = 1 - e^{-\lambda_n}$$
On sait que la série $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ converge. Cela implique que la suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0. On obtient alors $P(X_n \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_n} \underset{+\infty}{\sim} \lambda_n$.
Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} P(X_n \neq 0)$ converge.

3. Soit $A = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} (X_k \neq 0)$.
   a) Soit $\omega \in A$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \bigcup_{k \geqslant n} (X_k \neq 0)$ ce qui signifie qu'il existe $k \geqslant n$ tel que $X_k(\omega) \neq 0$. Dit autrement l'événement A est l'ensemble des éventualités ω telles qu'il existe une infinité d'entiers $k \geqslant 1$ tels que $X_k(\omega) \neq 0$.
   À l'inverse, $\omega \in \overline{A}$ signifie que $X_k(\omega)$ sera nul sauf pour un nombre fini d'entiers $k \geqslant 1$; cela peut aussi s'exprimer en disant que la suite $(X_k(\omega))_{k \geqslant 1}$ est stationnaire à 0.

b) Soit $n \geqslant 1$, notons $B_n = \bigcup_{k \geqslant n}(X_k \neq 0)$. On remarque que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc, par continuité décroissante,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$$

Or, pour $n \geqslant 1$, d'après l'inégalité de Boole,

$$0 \leqslant P(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(X_k \neq 0)$$

On en déduit que $P(A) = 0$ car le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers 0 comme reste d'une série convergente.

4. On considère la fonction $S : \Omega \to [0, +\infty]$ définie par

$$S : \omega \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$$

a) Comme dit précédent, pour tout $\omega \notin A$ la suite $(X_k(\omega))_{k\geqslant 1}$ est stationnaire à 0 et donc $S(\omega) < +\infty$. Cela signifie que $\overline{A} \subset (S < +\infty)$. En passant au complémentaire, $(S = +\infty) \subset A$. Cela implique que

$$0 \leqslant P(S = +\infty) \leqslant P(A) = 0$$

Finalement $P(S = +\infty) = 0$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On remarque pour commencer que la suite $((S_N \leqslant k))_{N\geqslant 1}$ est décroissante. De plus

$$(S \leqslant k) = \bigcap_{N\geqslant 1} (S_N \leqslant k)$$

Par continuité décroissante on a donc

$$P(S \leqslant k) = \lim_{N\to+\infty} P(S_N \leqslant k)$$

En utilisant la question 1 et en notant $\theta_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_i$ et $\theta = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \lim_{N\to+\infty} \theta_N$ pour alléger les notations,

$$P(S \leqslant k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{\theta_N^i}{i!} e^{-\theta_N} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\theta^i}{i!} e^{-\theta}$$

Finalement,

$$P(S = k) = P(S \leqslant k) - P(S \leqslant k-1) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

C'est-à-dire $S \hookrightarrow \mathscr{P}(\theta)$.

Problème

Partie I

1. Pour tout $i \in E$, $(\pi M)[j] = \sum_{i=0}^{N} \pi_i M[i,j] \geqslant 0$ comme somme de produits de nombres positifs. De plus

$$\sum_{j\in E} (\pi M)[j] = \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} \pi_i M[i,j] = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \pi_i M[i,j] = \sum_{i=0}^{N} \pi_i \sum_{j=0}^{N} M[i,j] = \sum_{i=0}^{N} \pi_i \times 1 = 1$$

Donc $\boxed{\pi M \text{ est une probabilité sur } E}$.

2. Soit M, M' deux matrices de transition sur E.
Pour tous $i, k \in E$, $(MM')[i,k] = \sum_{j=0}^{N} M[i,j]M'[j,k] \geqslant 0$ comme somme de produits de nombres positifs.
De plus pour tout $i \in E$,

$$\sum_{k\in E}(MM')[i,k] = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M[i,j]M'[j,k] = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} M[i,j]M'[j,k] = \sum_{i=0}^{N} M[i,j] \times 1 = 1$$

Donc $\boxed{MM' \text{ est une matrice de transition sur } E}$.

3. Pour tout $i \in E$, $i \underset{M}{\to} i$ car $M^0[i,i] = I_{N+1}[i,i] > 0$. Ainsi $\underset{M}{\to}$ $\boxed{\text{est réflexive}}$.
Soient $i, j, k \in E$ tels que $i \underset{M}{\to} j$ et $j \underset{M}{\to} k$. Il existe alors m, n tels que $M^m[i,j] > 0$ et $M^n[j,k] > 0$. Alors $M^{m+n}[i,k] = \sum_{j'\in E}(M^m)[i,j'](M^n)[j',k] > 0$ car tous les termes de cette somme sont positifs et au moins un d'entre eux (celui de rang j) est strictement positif. Donc $i \underset{M}{\to} k$. Ainsi $\underset{M}{\to}$ $\boxed{\text{est transitive}}$.

Elle n'est $\boxed{\text{pas toujours antisymétrique}}$: pour $M = \frac{1}{N+1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice de transition sur E, on a $1 \underset{M}{\to} 2$ et $2 \underset{M}{\to} 1$.

Elle n'est $\boxed{\text{pas toujours symétrique}}$: pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice de transition sur E, on a $1 \underset{M}{\to} N$ mais on n'a pas $N \underset{M}{\to} 1$.

Mais M $\boxed{\text{peut parfois être symétrique ou antisymétrique, voire les deux à la fois}}$. C'est par exemple le cas de $M = \frac{1}{N+1}I_{N+1}$.

4. Par récurrence et par la question 2, toutes les puissances de M sont des matrices de transition sur E.
Ainsi pour tout $i \in E$,

$$\boxed{\sum_{j\in E}\widetilde{M}[i,j] = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in E} M^n[i,j] = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 1 = 1}$$

Soient $i, j \in E$.
Si $i = j$ alors $M^0[i,j] > 0$.
Supposons que $i \neq j$. Comme $i \underset{M}{\to} j$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ (M^n)[i,j] > 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit n son plus petit élement.
Comme $0 < (M^n)[i,j] = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}\in E} M[i,k_1]M[k_1,k_2]\dots M[k_{n-1},j]$ et comme tous les termes de cette somme sont positifs, au moins un d'entre eux est strictement positif, donc il existe $k_1, \dots, k_{n-1} \in E$ tels que $M[i,k_1]M[k_1,k_2]\dots M[k_{n-1},j] > 0$. Tous les facteurs de ce produit sont alors strictement positifs. Notons $k_0 = i$ et $k_n = j$. Si $i, k_1, \dots, k_{n-1}, j$ n'étaient pas deux à deux distincts, il existerait $p, q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p < q$ et $k_p = k_q$. On aurait alors $0 <$

$M[i,k_1]\dots M[k_{p-1},k_p]M[k_q,k_{q+1}]\dots M[k_{n-1},j] \leqslant (M^{p+n-q})[i,j]$, ce qui contredit la minimalité de n car $p+n-q<n$.

Ainsi $n+1 \leqslant \mathrm{Card}(E) = N+1$, donc $n \leqslant N$.

Dans tous les cas, il existe donc $n \in [\![0,N]\!]$ tel que $(M^n)[i,j]>0$.

Donc $\widetilde{M}[i,j] \geqslant \frac{(M^n)[i,j]}{N+1}$, on a donc $\widetilde{M}[i,j]>0$.

Ainsi $\boxed{\widetilde{M} \text{ est une matrice de transition sur } E \text{ telle que } \forall i,j \in E\ \widetilde{M}[i,j]>0}$.

Partie II

5. Soit $j \in E$. Supposons (absurde) que $\pi_j = 0$. Montrons qu'alors $\forall i \in E,\ \pi_i = 0$, ce qui est contradictoire car alors $\sum_{i\in E}\pi_i = 0 \neq 1$.
   Soit $i \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n[i,j]>0$ (un tel n existe).
   Comme $\pi M = \pi$, on a $\pi M^n = \pi$ (récurrence immédiate). Ainsi
   $$\pi_i(M^n)[i,j] \leqslant \sum_{i'\in E}\pi_{i'}(M^n)[i',j] = \pi_j = 0$$
   donc $\pi_i = 0$.
6. a)
   $$f\left(\frac{(\mu M)[j]}{\pi_j}\right) = f\left(\sum_{i\in E}\frac{\mu_i M[i,j]}{\pi_j}\right) = f\left(\sum_{i\in E}\frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j}\frac{\mu_i}{\pi_i}\right)$$
   De plus les $\frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j}$ sont tous positifs et leur somme quand i parcourt E est $\frac{\pi_j}{\pi_j}=1$.
   Comme f est concave, on a donc
   $$\boxed{f\left(\frac{(\mu M)[j]}{\pi_j}\right) \geqslant \sum_{i\in E}\frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j} f\left(\frac{\mu_i}{\pi_i}\right)}$$

   b)
   $$\begin{aligned} H(\mu M) &= \sum_{j\in E}\pi_j f\left(\frac{(\mu M)[j]}{\pi_j}\right) \\ &\geqslant \sum_{j\in E}\pi_j\sum_{i\in E}\frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j} f\left(\frac{\mu_i}{\pi_i}\right) \\ &= \sum_{i\in E}\pi_i\sum_{j\in E}M[i,j]f\left(\frac{\mu_i}{\pi_i}\right) = \sum_{i\in E}\pi_i \times 1 \times f\left(\frac{\mu_i}{\pi_i}\right) = H(\mu) \end{aligned}$$
7. Supposons que pour tout $(i,j)\in E^2, M[i,j]>0$ et que $\mu M = \mu$.
   Alors $H(\mu M) = H(\mu)$ et donc toutes les inégalités obtenues à la question 6)a) sont des égalités (car si au moins une des inégalités est stricte alors $H(\mu M) > H(\mu)$).
   Soit $j \in E$. Les $\frac{\pi M[i,j]}{\pi_j}$ étant strictement positifs et f étant strictement concave, les $\frac{\mu_i}{\pi}$ sont tous égaux. Soit α leur valeur commune.
   $$1 = \sum_{i\in E}\mu_i = \sum_{i\in E}\alpha\pi_i = \alpha \times 1 = \alpha$$
   Donc $\boxed{\mu = \pi}$.

8. Toute probabilité M invariante est M^n-invariante pour tout naturel n. On en déduit que toute probabilité M-invariante est $\widetilde{M}$-invariante.
Or d'après la question 4, $\widetilde{M}$ vérifie l'hypothèse de la question précédente donc il existe au plus une probabilité $\widetilde{M}$-invariante. μ et π étant $\widetilde{M}$-invariantes, $\boxed{\text{elles sont égales}}$.

Partie III

9. Par hypothèse,
$$\forall (i,j) \in E^2, \rho_i M[i,j] = \rho_j M[j,i]$$
On en déduit que pour tout $j \in E$,
$$(\rho M)[j] = \sum_{i\in E} \rho_i M[i,j] = \sum_{i \in E} \rho_j M[i,j] = \rho_j \sum_{i\in E} M[j,i] = \rho_j \times 1 = \rho_j$$
Donc $\boxed{\rho \text{ est } M\text{-invariante}}$.

10. Soit D la matrice diagonale définie par
$$\forall (i,j) \in [\![0,N]\!]^2, D[i,j] = \sqrt{\rho_i}\delta_{i,j}$$
Montrer que la matrice $S = DMD^{-1}$ est une matrice symétrique réelle.
S est à coefficients réels comme produit de matrices à coefficients réels.
Multiplier à gauche par D revient à multiplier les lignes par $\sqrt{\rho_0}, \dots, \sqrt{\rho_N}$ et multiplier à droite par D^{-1} revient à diviser les colonnes par $\sqrt{\rho_0}, \dots, \sqrt{\rho_N}$.
Ainsi
$$\forall i,j \in E, \boxed{S[i,j] = \sqrt{\rho_i} M[i,j]/\sqrt{\rho_j} = \frac{\rho_i M[i,j]}{\sqrt{\rho_i\rho_j}}}$$
On a donc
$$\forall i,j \in E,\ S[j,i] = \frac{\rho_j M[j,i]}{\sqrt{\rho_i \rho_j}} = \frac{\rho_i M[i,j]}{\sqrt{\rho_i\rho_j}} = S[i,j]$$
Donc $\boxed{S \text{ est symétrique}}$.

11. Soit $\mu \in \mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N+1} \rho_i M_{i,j}\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\rho}_i} - \frac{\mu_j}{\sqrt{\rho}_j}\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N+1} \rho_i M_{i,j}\left(\frac{\mu_i^2}{\rho_i} + \frac{\mu_j^2}{\rho_j} - 2\frac{\mu_i\mu_j}{\sqrt{\rho_i\rho_j}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in E}\mu_i^2 \sum_{j\in E} M_{i,j} + \sum_{j\in E}\mu_j^2\sum_{i\in E} M_{j,i} - 2\sum_{i,j\in E} S[i,j]\mu_i\mu_j\right)\\
&\quad \text{car } \rho_i M_{i,j} = \rho_j M_{j,i}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in E}\mu_i^2 \times 1 + \sum_{j\in E}\mu_j^2 \times 1 - 2\sum_{i,j\in E} S[i,j]\mu_i\mu_j\right)\\
&= \sum_{i\in E}\mu_i^2 - \sum_{i,j\in E} S[i,j]\mu_i\mu_j\\
&= \sum_{i,j\in E}\mu_i\delta_{i,j}\mu_j - \sum_{i,j\in E}\mu_i S[i,j]\mu_j\\
&= \mu(I_{N+1} - S)\mu^\top
\end{aligned}$$

De même,

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N}\rho_i M_{i,j}\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\rho}_i}+\frac{\mu_j}{\sqrt{\rho}_j}\right)^2=\mu(I_{N+1}+S)\mu^\top}$$

12. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de S et $\mu\in\mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ tel que $\mu^\top$ soit un vecteur propre de S associé à λ.

   a) $\mu(I_{N+1}-S)\mu^T=\mu(1-\lambda)\mu^\top=(1-\lambda)\sum_{i=0}^N\mu_i^2$.
   Par la question précédente, $\mu(I_{N+1}-S)\mu^\top$ est positif comme somme de réels positifs.
   Donc $(1-\lambda)\sum_{i=0}^N\mu_i^2\geqslant 0$.
   Enfin $\sum_{i=0}^N\mu_i^2$ est <u>strictement</u> positif car $\mu\neq(0\ \ldots\ 0)$ donc il existe i_0 tel que $\mu_{i_0}\neq 0$, et on a $\sum_{i=0}^N\mu_i^2\geqslant\mu_{i_0}^2>0$.
   Donc $1-\lambda\geqslant 0$ et ainsi $\boxed{\lambda\leqslant 1}$.

   b) On a de même $1+\lambda\geqslant 0$ donc $\boxed{\lambda\geqslant -1}$.
   Ainsi les valeurs propres de S et donc de M sont comprises entre -1 et 1.

Partie IV

13. Chaque urne contient toujours N boules, et il y a N boules de chaque couleur.
   Donc à l'instant n :
   l'urne A contient X_n boules blanches et $N-X_n$ boules noires,
   l'urne B contient $N-X_n$ boules blanches et X_n boules noires.

14. a) La probabilité $P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne A et une boule noire dans l'urne B sachant qu'il y a k boules blanches dans l'urne A.
   Au sens de la probabilité conditionnelle $P_{(X_n=k)}$, on a k chances sur N de choisir une boule blanche dans l'urne A et k chances sur N de choisir une boule noire dans l'urne B. Les tirages dans ces deux urnes étant indépendants, on a $\boxed{P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1)=\left(\frac{k}{N}\right)^2}$.
   Plus généralement,

$$\boxed{P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=\ell)=\begin{cases}\left(\frac{k}{N}\right)^2 & \text{si} \quad \ell=k-1\\ \left(\frac{N-k}{N}\right)^2 & \text{si} \quad \ell=k+1\\ 2\frac{k}{N}\frac{N-k}{N} & \text{si} \quad \ell=k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

   Pour justifier la troisième ligne : $(X_{n+1}=k)$ a même intersection avec $(X_n=k)$ que la réunion des événements disjoints « tirer une boule blanche de A et une boule blanche de B » et « tirer une boule noire de A et une boule noire de B ».

   b) Soit M donnée par $M[k,\ell]=\begin{cases}\left(\frac{k}{N}\right)^2 & \text{si} \quad \ell=k-1\\ \left(\frac{N-k}{N}\right)^2 & \text{si} \quad \ell=k+1\\ 2\frac{k}{N}\frac{N-k}{N} & \text{si} \quad \ell=k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\ell\in E$, selon la formule des probabilités totales,

$$\sum_{k\in E}P((X_n=k)\cap(X_{n+1}=\ell))=P(X_{n+1}=\ell)$$

et pour tout $k \in E$,

$$\begin{aligned} P((X_n = k) \cap (X_{n+1} = \ell)) &= \begin{cases} P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = \ell) & \text{si} \quad P(X_n = k) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= P(X_n = k)M[k,l] \text{dans tous les cas} \end{aligned}$$

Donc $L_n M = L_{n+1}$.
M est bien une matrice de transition car ses coefficients sont positifs, et pour tout $k \in E$ la somme des coefficients de la $k^{ème}$ ligne de M est $\left(\frac{k+N-k}{N}\right)^2 = 1$, y compris dans les cas où k vaut 0 ou N car $0/N = 0$ et $(N-N)/N = 0$.

15. D'après le raisonnement de la question 4, il suffit pour que M soit irréductible que pour tous $i, j \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, \ldots, k_{n-1} \in E$ tels que :

$$M[i, k_1], M[k_1, k_2], \ldots, M_[k_{n-1}, j]$$

soient tous non nuls.
Or cela est vérifié :
si $i \leqslant j$ il suffit de prendre $n = j - i$ et $(k_1, \ldots, k_{n-1}) = (i+1, \ldots, j-1)$
si $l \leqslant i$ il suffit de prendre $n = i - j$ et $(k_1, \ldots, k_{n-1}) = (i-1, \ldots, j+1)$.
Ainsi $\boxed{M \text{ est irréductible}}$.

16. On cherche à construire une probabilité π telle que M soit π-réversible

a) Supposons que M est π-réversible. Alors

$$\pi_0 M[0,1] = \pi_1 M[1,0]$$

$$\pi_0 \left(\frac{N-0}{N}\right)^2 = \pi_1 \left(\frac{1}{N}\right)^2$$

$$\pi_1 = N^2 \pi_0$$

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,

$$\pi_{i-1} M[i-1, i] = \pi_i M[i, i-1]$$

$$\pi_{i-1} \left(\frac{N-(i-1)}{N}\right)^2 = \pi_i \left(\frac{i}{N}\right)^2$$

$$\pi_i = \left(\frac{N-(i-1)}{i}\right)^2 \pi_{i-1}$$

Ainsi pour tout $i \in [\![0, N]\!]$,

$$\pi_i = \left(\frac{(N-(i-1))(N-(i-2))\ldots(N-(1-1))}{i(i-1)\ldots 1}\right)^2 \pi_0 = \boxed{\binom{N}{i}^2 \pi_0}$$

b) Réciproquement, si la relation précédente est vérifiée et si $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$, alors π est une probabllité et M est π-réversible.
Il suffit donc de poser

$$\boxed{\pi_i = \frac{\binom{N}{i}^2}{K}}$$

avec $K = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^2$ (qui est bien un réel strictement positif)
On peut calculer K par la formule de Vandermonde :

$$K = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\binom{N}{N-i} = \boxed{\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2}}$$

17. a) Soit $\mu \in \mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ tel que $\mu^\top \in \operatorname{Ker}(S + I_{N+1})$. Par la question 11), on a :

$$0 = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant N} \pi_i M_{i,j} \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\pi}_i} + \frac{\mu_j}{\sqrt{\pi}_j}\right)^2$$

Les π_i étant tous strictement positifs et les $M[i,j]$ étant tous positifs, et étant non nuls lorsque $j \in \{i-1, i, i+1\}$, et en particulier lorsque $j = i$, on a pour tout $i \in E$:

$$2\frac{\mu_i}{\sqrt{\pi}_i} = 0$$

Donc μ est nul.

$\boxed{\text{Donc } -1 \text{ n'est pas valeur propre de } S. \text{ Ni de } M \text{ car } M \text{ et } S \text{ sont semblables.}}$

b) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_{n+1} = L_n M = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X_j^\top M = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} (M^\top X_j)^\top = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} (\lambda_j X_j)^\top = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \lambda_j X_j^\top$$

donc pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ_j.
Comme les λ_j sont dans $]-1,1]$, ces suites convergent.
Notons $X_j^\top = (x_{j,0}\ x_{j,1}\ \cdots\ x_{j,N})$. Par linéarité de la limite, on a pour tout $i \in E$:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \sum_{j=0}^{N} x_{j,i} \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$$

ii. Pour montrer que $\mu = \pi$, il suffit de montrer que μ est une probabilité M-invariante car une telle probabilité est unique d'après la question 8 et l'irréductibilité de M.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une probabilité, donc ses coefficients sont positifs de somme 1.
Par passage à la limite dans les inégalités larges, les coefficients de μ sont positifs, et par linéarité de la limite, la somme des coefficients de μ vaut 1.
Donc μ est une probabilité.
Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n M = L_{n+1}$$

donc pour tout $j \in E$,

$$\sum_{i\in E} P(X_n = i) M[i,j] = P(X_{n+1} = j)$$

Par linéarité de la limite,

$$\sum_{i\in E} \mu_i M[i,j] = \mu_j$$

$\boxed{\text{Donc } \mu \text{ est une (la) probabilité } M\text{-invariante et ainsi } \mu = \pi}$.