

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comporte un exercice et un problème indépendants.

Exercice

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que la série $\sum_{n \geq 1} \lambda_n$ converge.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur cet espace.

On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n .

Pour tout entier $N \geq 1$ on pose $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$

1. Soit $N \geq 1$. Déterminer la loi de S_N .

On pourra commencer par déterminer la loi de S_2 .

2. Soit $n \geq 1$, déterminer $P(X_n \neq 0)$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} P(X_n \neq 0)$ converge.

3. Soit $A = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} (X_k \neq 0)$.

a) Décrire « en français » l'événement A .

b) Montrer que $P(A) = 0$

4. On considère la fonction $S : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$S : \omega \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(\omega)$$

a) Montrer que $P(S = +\infty) = 0$.

b) Déterminer la loi de S .

On pourra commencer par calculer $P(S \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Problème

Dans le problème, toutes les variables aléatoires seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fixé. On fixe N un entier naturel non nul et on pose $E = \llbracket 0, N \rrbracket$.

Pour $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $i, j \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on notera $M[i, j]$ ou $M_{i,j}$ le coefficient de M en position (i, j) .

- On appelle matrice de transition sur E une matrice $M \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \sum_{j=0}^N M[i, j] = 1$.
- On appelle probabilité¹ sur E une matrice ligne $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_N) \in \mathcal{M}_{1, N+1}(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que $\sum_{j=0}^N \pi_j = 1$.
- Soit M une matrice de transition. Une probabilité π sera dite M -invariante si $\pi M = \pi$.
- Soit M une matrice de transition sur E . Soit i, j dans E , on dit que j est M -accessible à partir de i s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n[i, j] > 0$. On note alors $i \xrightarrow[M]{}$ j . Une matrice de transition M est dite *irréductible* si pour tout $(i, j) \in E^2, i \xrightarrow[M]{}$ j .
- Une matrice de transition M est dite *réversible* s'il existe une probabilité ρ telle que

$$\forall (i, j) \in E^2, \rho_i M[i, j] = \rho_j M[j, i]$$

On dit alors que M est ρ -réversible.

Partie I

1. Montrer que si π est une probabilité sur E et M est une matrice de transition, πM est encore une probabilité sur E .
2. Soit M, M' deux matrices de transition sur E . Montrer que MM' est une matrice de transition sur E .
3. Soit M une matrice de transition sur E . Montrer que la relation $\xrightarrow[M]{}$ est transitive et réflexive. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?
4. Soit M une matrice de transition irréductible sur E . On pose $\widetilde{M} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N M^n$. Montrer que $\widetilde{M}$ est une matrice de transition sur E et que $\forall (i, j) \in E^2, \widetilde{M}[i, j] > 0$.

Partie II

On considère une matrice de transition M sur E irréductible. Soit π une probabilité M -invariante. On veut montrer qu'il n'existe alors pas d'autre probabilité invariante.

5. Montrer que $\forall j \in E, \pi_j > 0$

Soit f une fonction strictement concave c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

et de plus s'il y a égalité et qu'aucun λ_i n'est nul alors $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

1. ce que l'on appelle ici probabilité est la définition d'une probabilité par ses valeurs sur les singletons

On admet qu'une telle fonction existe.
 Pour toute probabilité μ sur E on pose

$$H(\mu) = \sum_{j=0}^N \pi_j f\left(\frac{\mu_j}{\pi_j}\right)$$

6. Soit μ une probabilité sur E .

a) Montrer que pour tout $j \in E$,

$$f\left(\frac{(\mu M)[j]}{\pi_j}\right) \geq \sum_{i=0}^N \frac{\pi_i M[i, j]}{\pi_j} f\left(\frac{\mu_i}{\pi_i}\right)$$

b) En déduire que $H(\mu M) \geq H(\mu)$.

7. On suppose dans cette question seulement que pour tout $(i, j) \in E^2$, $M[i, j] > 0$. Montrer que si $\mu M = \mu$ alors $\mu = \pi$.

8. On revient au cas général d'une matrice de transition irréductible. Montrer que π est l'unique probabilité M -invariante.

On pourra utiliser la question 4.

Partie III

On considère une matrice de transition M supposée irréductible et réversible. Soit ρ une probabilité telle que M est ρ -réversible.

9. Montrer que ρ est une probabilité M -invariante. Ainsi ρ est l'unique probabilité invariante par M et d'après la question 5, les ρ_i sont tous non nuls.

10. Soit D la matrice diagonale définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2, D[i, j] = \sqrt{\rho_i} \delta_{i,j}$$

Montrer que la matrice $S = DMD^{-1}$ est une matrice symétrique réelle.

11. Soit $\mu \in \mathcal{M}_{1, N+1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mu(I_{N+1} - S)\mu^\top = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq N} \rho_i M_{i,j} \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\rho_i}} - \frac{\mu_j}{\sqrt{\rho_j}} \right)^2$$

et que

$$\mu(I_{N+1} + S)\mu^\top = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq N} \rho_i M_{i,j} \left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\rho_i}} + \frac{\mu_j}{\sqrt{\rho_j}} \right)^2$$

12. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S . Il existe donc $\mu \in \mathcal{M}_{1, N+1}(\mathbb{R})$ tel que $\mu^\top$ soit un vecteur propre de S associé à λ .

a) Montrer que $\mu(I_{N+1} - S)\mu^\top = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^N \mu_i^2$. En déduire que $\lambda \leq 1$.

b) Montrer de même que $\lambda \geq -1$.

Ainsi les valeurs propres de S et donc de M sont comprises entre -1 et 1 .

Partie IV

On dispose de deux urnes notées A et B , de N boules blanches et de N boules noires. On dispose les boules dans les urnes de sorte qu'il y ait N boules dans chaque urne.

On appelle X_0 la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches initialement dans l'urne A .

On fait évoluer la composition des urnes de la manière suivante :

- À chaque instant n , on tire au hasard et de manière équiprobable une boule dans chaque urne
- La boule tirée dans l'urne A est placée dans l'urne B et la boule tirée dans l'urne B est placée dans l'urne A .

On note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne A après n échanges.

13. Soit $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en fonction de N et $X_n(\omega)$ le nombre de boules noires (après n échanges et dans l'issue ω) dans l'urne A , le nombre de boules blanches dans l'urne B et le nombre de boules noires dans l'urne B .

14. a) Justifier informellement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que $(X_n = k)$ n'est pas négligeable, on a :

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^2$$

Calculer plus généralement $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = \ell)$ pour tous $k, \ell \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que $P(X_n = k) \neq 0$.

On pose $L_n = \left(P(X_n = 0) \dots P(X_n = N)\right)$.

- b) Donner une matrice de transition M indépendante de n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n M = L_{n+1}$$

- c) Montrer que M est irréductible.

15. On cherche à construire une probabilité π telle que M soit π -réversible

- a) Montrer que si M est π -réversible alors $\pi_1 = N^2 \pi_0$. Plus généralement exprimer les π_j à l'aide de π_0 .
- b) Déterminer une probabilité π telle que M est π -réversible.

On pourra utiliser sans démonstration la formule de Vandermonde :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \sum_{\substack{i \geq 0, j \geq 0 \\ i+j=r}} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \binom{p+q}{r}$$

16. a) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de M .

On utilisera la question 11

- b) i. On admet du fait que S est symétrique réelle (question 10), elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et donc M et $M^\top$ le sont également.

Soit $(X_0, \dots, X_N)$ une base de vecteurs propres de $M^\top$ associés aux valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ de M (et $M^\top$) répétées selon leur multiplicité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_{n,0}, \dots, a_{n,N}$ les coordonnées de $L_n^\top$ dans cette base. Ainsi $L_n = \sum_{j=0}^N a_{n,j} X_j^\top$.

Montrer que pour tout $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la suite $(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

En déduire que pour tout $i \in E$ la suite $\left(P(X_n = i)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- ii. On note $\mu = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i)\right)_{0 \leq i \leq N}$.

Montrer que $\mu = \pi$.