Nom :

1) Loi de S_2 $S_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$ .... ☐0 ☐1

indépendance .... ☐0 ☐1

$S_N \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$ .... ☐0 ☐1

2) $P(X_n \neq 0) = 1-\exp(-\lambda_n)$ .... ☐0 ☐1

La série $\sum P(X_n \neq 0)$ converge car $P(X_n \neq 0) \sim \lambda_n$ .... ☐0 ☐1

3)a) $A = (X_k(\omega))_{k\geqslant 1}$ n'est pas stationnaire à 0 .... ☐0 ☐1

3)b) $P(\cup_{k\geqslant n}(X_k \neq 0)) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(X_n \neq 0)$ par Boole .... ☐0 ☐1

$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k\geqslant n}(X_k \neq 0))$ continuité décroissante .... ☐0 ☐1

$P(A) = 0$ reste d'une série convergente .... ☐0 ☐1

4)a) $P(S=+\infty) = 0$ car $\overline{A} \subset (S < +\infty)$ .... ☐0 ☐1

4)b) $S \sim \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k)$ .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

---

1) πM probabilité car $(\pi M)_i \geqslant 0$ et $\sum_i (\pi M)_i = 1$ .... ☐0 ☐1 ☐2

2) MM' mat. de trans. car $(MM')_{i,j} \geqslant 0$ et $\sum_j (MM')_{i,j} = 1$ .... ☐0 ☐1 ☐2

3) La relation $\underset{P}{\to}$ est transitive .... ☐0 ☐1

et reflexive pour $n=0$ .... ☐0 ☐1

Elle peut être symétrique...mais pas toujours .... ☐0 ☐1 ☐2

Elle peut être antisymétrique....mais pas toujours .... ☐0 ☐1 ☐2

4) Pour $\widetilde{M} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} M^k$ on a $\widetilde{M}[i,j] > 0$ .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

---

5) Pour tout $j \in E$, $\pi_j > 0$ .... ☐0 ☐1 ☐2

6)a) $f\left(\frac{(\mu M)[j]}{\pi_j}\right) \geqslant \sum_{i=0}^{N} \frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j} f(\frac{\mu_i}{\pi_i})$ choix des poids $\left(\frac{\pi_i M[i,j]}{\pi_j}\right)_i$ .... ☐0 ☐1

qui sont de somme 1 car $\pi M = \pi$ .... ☐0 ☐1

6)b) $H(\mu M) \geqslant H(\mu)$ .... ☐0 ☐1

7) Si $M[i,j] > 0$ et $\mu M = \mu$ alors $\mu = \pi$ car $\frac{\mu_i}{\pi_i}$ constant .... ☐0 ☐1

et $\sum \pi_i = \sum \mu_i = 1$ .... ☐0 ☐1

8) si μ est M invariante elle est $\widetilde{M}$ invariante .... ☐0 ☐1

donc $\mu = \pi$ .... ☐0 ☐1

---

9) ρ (supposée M-renversante) est M-invariante .... ☐0 ☐1

10) $S_{i,j} = \frac{\rho_i M_{i,j}}{\sqrt{\rho_i \rho_j}} = S_{j,i}$ .... ☐0 ☐1

11) $\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant N+1} \rho_i M_{i,j}\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{\rho_i}} - \frac{\mu_j}{\sqrt{\rho_j}}\right)^2 = \mu(I-S)\mu^{\top}$ .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

idem avec des + ... ☐0 ☐1

12)a) $\mu(I-S)\mu^{\top} = (1-\lambda)\sum_i \mu_i^2$ si $\mu^{\top} \in E_\lambda(S)$ .... ☐0 ☐1

$\lambda \leqslant 1$ .... ☐0 ☐1

b) $\lambda \geqslant -1$ .... ☐0 ☐1

---

13) nbres de boules en fction de X_n .... ☐0 ☐1

14)a) justifier informellement $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = (k/N)^2$ .... ☐0 ☐1

donner toutes les probas conditionnelles .... ☐0 ☐1

b) $M = \dots$ .... ☐0 ☐1

justifier que cette matrice convient .... ☐0 ☐1

c) M est irréductible .... ☐0 ☐1 ☐2

15)a) si π est M-renversante alors $\pi_1 = N^2\pi_0$ .... ☐0 ☐1

et $\pi_j = \binom{N}{j}^2 \pi_0$ .... ☐0 ☐1

b) et ainsi $\pi_j = \binom{N}{j}^2/K$ avec $K = \sum_i \binom{N}{i}^2$ .... ☐0 ☐1

$K = \binom{2N}{N} = \frac{2N}{N!^2}$ .... ☐0 ☐1

réciproquement cela définit bien une proba renversante .... ☐0 ☐1

16)a) -1 n'est pas valeur propre de M .... ☐0 ☐1 ☐2

b)i) les suites $(P(X_n = i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

ii) et leurs limites forment une proba M-renversante .... ☐0 ☐1

donc c'est π .... ☐0 ☐1

Bonus) .... ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1