

## Partie I : Matrices compagnons

Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme unitaire de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$ . On définit la matrice compagnon de  $P$  par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Notons que pour  $n = 1$  et  $P = X + a_0$  on a donc  $C(P) = (-a_0) \in \mathcal{M}_1(\mathbf{K})$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $C(P)$  pour  $P = X^3 + X^2 - X - 1$ .
2. Montrer que  $\chi_{C(P)} = P$ . On pourra procéder par récurrence mais ce n'est pas obligatoire.

## Partie II : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On veut montrer que  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. On fixe un élément  $x$  de  $E$  non nul.

On note  $p$  le plus petit entier  $p$  tel que la famille  $(x = u^0(x), u(x), \dots, u^p(x))$  soit liée.

- (a) Justifier que l'entier  $p$  est bien défini et que  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.

On complète cette famille en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

- (b) Montrer qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$  tels que

$$u^p(x) + a_{p-1}u^{p-1}(x) + \dots + a_1u(x) + a_0x = 0$$

On note  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

- (c) Justifier que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  peut s'écrire sous la forme  $\left( \begin{array}{c|c} C(P) & * \\ \hline 0 & M \end{array} \right)$ .

- (d) Calculer  $P(u)(x)$ .

- (e) Exprimer  $\chi_u$  en fonction de  $\chi_M$ .

- (f) Prouver que  $\chi_u(u)(x) = 0_E$ .

2. Conclure.