Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est f.

1. *Montrer que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A.*
2. *Montrer que $\mathbf{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbf{R}[X]\}$ est de dimension finie et en trouver une base explicite.*
3. *Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est de dimension supérieure ou égale à 3.*
4. *Soit $U = (a, b, c)^\top$ un élément non nul de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On considère*

$$H_U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ ,\ ax + by + cz = 0\}$$

   Montrer que H est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de $A^\top$.
5. *Trouver explicitement les plans stables par f.*
6. *Trouver les projecteurs π de $\mathbf{R}^3$ qui commutent avec f.*

Solution :

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3)\left[(X-2)^2 - 1\right] = (X-3)^2(X-1)$$

   On sait que $\pi_A | \chi_A$ et que $Z(\pi_A) = Z(\chi_A)$, on en déduit que $\pi_A \in \{\chi_A, (X-3)(X-1)\}$.
   En calculant on voit que $(A-3I_3)(A-I_3) \neq 0$ donc $\pi_A = \chi_A$. Cela montre que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A.
2. Montrons que $\mathbf{R}[A] = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
   - La famille (I, A, A^2) est libre. En effet, pour $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$, $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 = 0$ implique que $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ annule A et donc que $\chi_A | P$. Comme $\deg(\chi_A) = 3 > \deg(P)$ on obtient que $P = 0$ et donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. On a bien montré que (I, A, A^2) est libre.
   - Montrons que (I, A, A^2) engendre $\mathbf{R}[A]$. Soit $M \in \mathbf{R}[A]$. Il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $M = P(A)$. On effectue la division euclidienne de P par π_A :

$$P = Q \times \pi_A + R \text{ où } \deg(R) \leqslant 2$$

     On en déduit que $M = P(A) = R(A) \in \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
3. Notons $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. On sait que $\mathbf{R}[A]$ est une algèbre commutative et que $A \in \mathbf{R}[A]$. On en déduit que $\mathbf{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$ et donc $3 = \dim \mathbf{R}[A] \leqslant \dim \mathscr{C}(A)$.
   Remarque : On peut montrer que $\mathscr{C}(A) = \mathbf{R}[A]$ mais c'est plus difficile.

4. Le résultat est général. Il est vrai pour toute matrice A. Pour tout vecteur $U = (a, b, c)^\top \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on note

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & ax + by + cz \end{array}$$

Pour un vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi_U(v) = U^\top V$ où $V = (x, y, z)^\top$ est la matrice colonne des coordonnées de v. Avec ces notations, $H_U = \mathrm{Ker}(\varphi_U)$. On a alors

$$\begin{aligned} H_U \text{ stable par } f &\iff \big(\forall v \in \mathbf{R}^3, v \in H_U \Rightarrow f(v) \in H_U\big) \\ &\iff \big(\forall v \in \mathbf{R}^3, \varphi_U(v) = 0 \Rightarrow U^\top(AV) = 0\big) \\ &\iff \big(\forall v \in \mathbf{R}^3, \varphi_U(v) = 0 \Rightarrow (A^\top U)^\top V = 0\big) \\ &\iff \big(\forall v \in \mathbf{R}^3, \varphi_U(v) = 0 \Rightarrow \varphi_{A^\top U}(v) = 0\big) \\ &\iff \mathrm{Ker}(\varphi_U) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{A^\top U}) \\ &\overset{(1)}{\iff} \exists \lambda \in \mathbf{R}, \varphi_{A^\top U} = \lambda \varphi_U \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbf{R}, \varphi_{A^\top U} = \varphi_{\lambda U} \\ &\overset{(2)}{\iff} \exists \lambda \in \mathbf{R}, A^\top U = \lambda U \end{aligned}$$

Pour $\overset{(1)}{\iff}$, on a utilisé que φ et ψ étaient deux formes linéaires alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$. Le cas où $\lambda = 0$ permet de traiter le cas où $\mathrm{Ker}(\varphi_U)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi_{A^\top U})$ ce qui revient à $\mathrm{Ker}(\varphi_{A^\top U}) = \mathbf{R}^3$ et donc $\varphi_{A^\top U} = 0$.

Pour $\overset{(2)}{\iff}$, on a utilisé que $U \mapsto \varphi_U$ était une bijection de $\mathbf{R}^3$ dans l'espace dual $(\mathbf{R}^3)^*$.

5. On sait que $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$. De plus

$$E_1(A^\top) = \mathrm{Vect}(X_1) \text{ et } E_3(A^\top) = \mathrm{Vect}(X_3)$$

où $X_1 = (1, -1, 0)^\top$ et $X_3 = (0, 0, 1)^\top$. Les plans stables sont les plans

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ ,\ x - y = 0\} \text{ et } H' = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ ,\ z = 0\}$$

6. Soit π un projecteur de $\mathbf{R}^3$. Notons $F = \mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}(\pi)$ de sorte que π est le projecteur sur F et parallèlement à G. On sait que si π et f commutent alors $\mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(\pi)$ sont stables par f. Réciproquement, si F et G sont stables par f. Pour tout vecteur $w \in \mathbf{R}^3$. On écrit $w = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$ alors

$$f(\pi(w)) = f(u) \text{ et } \pi(f(w)) = \pi(f(u) + f(v)) = \pi(f(u)) + \pi(f(v)) = f(u)$$

La dernière égalité vient du fait que $f(u) \in F$ et donc $\pi(f(u)) = f(u)$ et que $f(v) \in G$ donc $\pi(f(v)) = 0$. On a donc montré que les projecteurs qui commutent à f sont les projecteurs sur F parallèlement à G où F et G sont stables par f.

Cherchons alors les droites stables par f, c'est-à-dire les vecteurs propres. On trouve

$$E_1(A^\top) = \mathrm{Vect}(Y_1) \text{ et } E_3(A^\top) = \mathrm{Vect}(Y_3)$$

où $Y_1 = (1, -1, 0)^\top$ et $Y_3 = (1, 1, 0)^\top$. Les droites stables sont donc

$$\Delta = \mathrm{Vect}(1, -1, 0) \text{ et } \Delta' = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$$

Les projecteurs qui commutent avec f sont donc

- Les projecteurs triviaux 0 et id.
- Le projecteur sur H parallèlement à Δ et le projecteur sur Δ parallèlement à H. On ne peut pas utiliser Δ' car elle est contenue dans H et dans H'.