

**Semaine 12 - du 12 au 16 décembre****Réduction des endomorphismes**

---

**Idéal d'un anneau commutatif**

Définition

Si  $I$  et  $J$  sont des idéaux,  $I \cap J$  et  $I + J$  sont des idéaux

Idéaux principaux

**Arithmétique - Rappels**

Tous les idéaux de  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont principaux

Définition du PGCD, du PPCM

Propriétés du PGCD : algorithme d'Euclide, relation de Bézout

PGCD de  $n$  polynômes

**Polynômes de matrices et d'endomorphismes**

Définition de  $P(u)$  et  $P(A)$  pour  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Morphismes d'algèbres  $\Phi_u : P \mapsto P(u)$  et  $\Phi_A : P \mapsto P(A)$ .

**Polynômes annulateurs**

Idéal des polynômes annulateurs d'une endomorphisme, d'une matrice.

Polynôme minimal

Si  $P(A) = 0$  et  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  alors  $P(\lambda) = 0$ .

Théorème de Cayley-Hamilton :  $\chi_A(A) = 0$ .

Lemme de décomposition des noyaux

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme annulateur d'un endomorphisme induit ; diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

**Endomorphisme annulé par un polynôme scindé**

Sous-espace caractéristiques

S'il existe un polynôme scindé annulant  $u$ , décomposition de  $E$  en somme directe des sous-espaces caractéristiques. Ils sont stables par  $u$  et sur chacun  $u$  induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent

Traduction matricielle