MP2 — 2022 – 2023

Semaine 13 - du 3 au 6 janvier

Espaces vectoriels normés

Normes

Définition d'une norme sur un espace vectoriel.
Norme euclidienne sur un espace préhilbertien réel ; extension au cas des espaces préhilbertien complexe
Norme 1 et norme ∞ : $||.||_1, ||.||_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$; $||.||_1, ||.||_\infty$ sur un espace de fonctions
Norme produit sur un produit d'espaces vectoriels normés

Distance

Définition d'une distance
Distance associée à une norme

Boules

Boules ouvertes, boules fermées, sphères
Les boules sont convexes

Normes équivalentes

Définition de normes équivalentes.
Exemple

Caractère borné

Partie / suite / fonction bornée. Une partie est bornée si et seulement si elle est inclus dans une boule.

Suites

Convergence. Unicité de la limite.
La suite (u_n) converge vers ℓ ssi $(||u_n - \ell||)$ tend vers 0.
Cas de la norme produit.
Invariance de la convergence en remplaçant la norme par une norme équivalente.
Toute suite convergente est bornée.
Limite d'une somme, compatibilité à la multiplication externe.
Compatibilité de la limite au produit dans le cas d'une algèbre $\mathscr{A}$ muni d'une norme $||.||$ tel qu'il existe une constante C vérifiant : $\forall x, y \in \mathscr{A}^2, ||x \times y|| \leqslant C||x||.||y||$
Valeur d'adhérence d'une suite

Applications lipschitziennes

Définition d'une application lipschitzienne
Si (u_n) tend vers ℓ et que f est lipschitzienne, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$
Si f est linéaire, elle est lipschitzienne si et seulement s'il existe k tel que $\forall x \in E, ||f(x)|| \leqslant k||x||$.
Normes subordonnées

On a admis qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes et que toutes les applications linéaires étaient lipschitziennes.