1. Soit u, v deux endomorphismes de E. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$

   (a) Montrer que $P(u)$ commute avec v.

Corrigé

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Comme $u \circ v = v \circ u$ on a $u^2 \circ v = u \circ v \circ u = v \circ u^2$. Par une récurrence immédiate, pour tout entier $k \in \mathbf{N}, u^k \circ v = v \circ u^k$.
Dès lors, par linéarité,

$$P(u) \circ v = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \circ v = \sum_{k=0}^{d} a_k v \circ u^k = v \circ \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = v \circ P(u)$$

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par v.

Corrigé

Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$. Montrons que $v(x) \in \mathrm{Ker}(P(u))$.

$$P(u)(v(x)) = (P(u) \circ v)(x) = (v \circ P(u))(x) = v(P(u)(x)) = v(0_E) = 0_E$$

On a bien $v(x) \in \mathrm{Ker}(P(u))$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer χ_A

Corrigé

On a $chi_A = X^3 + 6X^2 + 8X = X(X+2)(X+4)$

(b) Déterminer π_A. On justifiera les calculs

Corrigé

Comme χ_A est scindé à racines simples, $\pi_A = \chi_A$

(c) Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer A^k en fonction I, A, A^2, A^3 (elles ne sont peut-être pas toutes nécessaires).

Corrigé

On sait que $\deg(\pi_A) = 3$ donc $\mathbf{K}[A] = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. Soit $k \in \mathbf{N}$, par division euclidienne,

$$X^k = Q_k \pi_A + R_k \text{ où } \deg(R_k) \leqslant 2$$

En évaluant en $0, -2$ et -4 on obtient que

$$R_k(X) = 0^k L_0 + (-2)^k L_{-2} + (-4)^k L_{-4}$$

où $L_0 = \frac{1}{8}(X+2)(X+4), L_{-2} = -\frac{1}{4}X(X+4)$ et $L_{-4} = \frac{1}{8}X(X+2)$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange.
On obtient

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{0^k}{8}(A^2 + 6A + 8I) - \frac{2(-2)^k}{8}(A^2 + 4A) + \frac{(-4)^k}{8}(A^2 + 2A) \\ &= 0^k I + \frac{6.0^k - 8.(-2)^k + 2.(-4)^k}{8} A + \frac{0^k - 2.(-2)^k + (-4)^k}{8} A^2 \end{aligned}$$