

Théorème (Théorème d'Abel radial)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose de plus que la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge. On a

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose de plus que la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge.

1. On suppose dans cette question que $R = 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k ; S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

Soit $\varepsilon > 0$:

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|\rho_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Justifier, pour tout entier n et pour tout entier $p > n + 1$, l'égalité :

$$\forall x \in [0, 1], \quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1} \rho_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k) \rho_k - x^p \rho_p$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $p > n + 1$:

$$\forall x \in [0, 1] \quad , \quad |S_p(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p \right)$$

(d) En déduire que : $\forall n \geq N, \forall x \in [0, 1], \quad |R_n(x)| \leq \varepsilon$

(e) Conclure que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(f) Démontrer le théorème d'Abel radial dans le cas où $R = 1$.

2. Démontrer le cas général du théorème.

3. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ et calculer sa somme.