Définition 1

Soit w un vecteur non nul de E et θ un réel. On appelle rotation d'axe autour de w et d'angle θ, l'isométrie vectorielle laissant stable $F = Vect(w)$ et tel que $\check{f}$ la restriction de f à $H = F^{\perp}$ soit la rotation d'angle θ.
Si $\mathscr{B} = (u, v, w')$ est une base orthonormée directe avec $w' = w/||w||$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice d'une rotation : Il faut savoir déterminer la matrice d'une rotation dont on connait w et θ.

Traitons un exemple. Soit w le vecteur $w = (1, 2, 0)$. On cherche la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la rotation autour de w et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

On cherche un vecteur u orthogonal à w. Par exemple $u = (2, -1, 0)$. On cherche alors v tel que (u', v', w') soit une base orthonormée directe où $u' = \frac{u}{||u||}$, $v' = \frac{v}{||v||}$ et $w = \frac{w}{||w||}$. Il suffit de prendre $v' = w \wedge u = (0, 0, -5)$.

On pose $\mathscr{B} = (u', v', w')$ et on sait que

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base de la base canonique à $\mathscr{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice cherchée $B = \mathrm{Mat}_{(\mathrm{can})}(r)$ vérifie que $M = P^{-1}BP$ donc $B = PMP^{-1} = PMPP^{\top}$ car $P \in O_3(\mathbf{R})$. Finalement

$$B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2\sqrt{15} \\ 2 & 9 & \sqrt{15} \\ 2\sqrt{15} & -\sqrt{15} & 5 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier par le calcul que $B \in SO_3(\mathbf{R})$.

Détermination de l'axe et de l'angle :

On considère une matrice $A \in SO_3(\mathbf{R})$. C'est la matrice d'une rotation. On cherche à déterminer son axe et son angle.

Par exemple pour $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que A est bien un matrice orthogonale et que son déterminant vaut 1. L'endomorphisme r canoniquement associé est donc une rotation de $\mathbf{R}^3$.

Pour déterminer l'axe il suffit de chercher les vecteurs invariants c'est-à-dire les vecteurs x qui vérifient $r(x) = x$. On cherche donc le noyau de $r - \mathrm{id}$. On voit que

$$A - I = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & -5 & -7 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (3, -1, -1)$. Choisir ce vecteur w permet d'orienter le plan $(\mathrm{Vect}(w))^\perp$. L'endomorphisme r est donc une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(w)$. On note θ son angle.

On sait qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{tr}(r) = 2\cos(\theta) + 1$ et donc $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(r)-1}{2} = \frac{7}{18}$.
On en déduit que $\theta = \pm \arccos\left(\frac{7}{18}\right)$.
Il reste à calculer le signe de θ. Pour cela, on va utiliser un lemme.

Lemme 2

Soit w un vecteur, θ un réel et f la rotation d'angle θ autour de $\mathrm{Vect}(w)$. Pour tout vecteur u non nul orthogonal à w, on a

$$f(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w' \wedge u)$$

où $w' = \frac{w}{||w||}$.

Démonstration : On pose $u' = \frac{u}{||u||}$. Comme u' et w' sont des vecteurs orthogonaux et unitaires, la base $(u', w', u' \wedge w')$ est une base orthonormée directe donc la base $(u', w' \wedge u', w')$ aussi. Dans cette base, la matrice de f est de la forme de la définition.

La première colonne permet de dire que $f(u') = (\cos\theta)u' + (\sin\theta)(w' \wedge u')$.

En multipliant par $||u||$ on obtient

$$f(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w' \wedge u)$$

□

Si on considère un vecteur x qui n'est pas colinéaire à w. On peut le décomposer en $x = u + \lambda w$ où u est orthogonal à w et non nul. On en déduit que

$$r(x) = r(u) + \lambda w = (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w' \wedge u) + \lambda w$$

On calcule alors le produit mixte $[x, r(x), w]$. Comme le produit mixte est multilinéaire et alterné,

$$[x, r(x), w] = [u + \lambda w, (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w' \wedge u) + \lambda w, w] = \sin(\theta)[u, w' \wedge u, w]$$

Il est donc du signe de $\sin(\theta)$. Dans notre cas, on prend $x = (1, 0, 0)$, on a alors $r(x) = \frac{1}{9}(1, 4, 8)$. On regarde alors

$$[x, r(x), w] = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} > 0$$

Cela montre que $\sin(\theta) > 0$. L'angle de la rotation est donc $+\arccos(\frac{7}{18})$.