Espaces vectoriels normés 2 (Partie I)

Chapitre 13

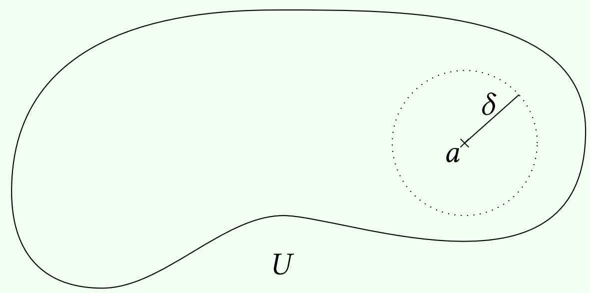
Nous allons continuer à étudier les espaces vectoriels normés. Dans ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Sans précisions autre, E désignera un espace vectoriel normé dont la norme sera notée $||.||$.

1 Topologie d'un espace vectoriel normé

1.1 Ouverts

Définition 13.1 (Ouverts)

Soit U une partie de E. On dit que c'est un ouvert de E si pour tout a dans U il existe $\delta > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, \delta)$ soit inclus dans U.



On peut dire que X est un ouvert ou que X est ouvert (sous-entendu un ensemble ouvert) voire ouverte (une partie ouverte).

Remarques :

1. La valeur de δ peut dépendre de a.
2. Cela signifie que si U est un ouvert, tout point « à coté » d'un point de U est encore dans U.

Exemples :

1. Dans $\mathbf{R}$, un intervalle ouvert est ouvert. Par exemple $U =]0, 1[$.
2. Dans $\mathbf{R}$, l'ensemble $[0, 1]$ n'est pas un ouvert.
3. Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts. Ce sont les ouverts *trivaux*.

4. Soit $E = \mathbf{K}_n[X]$. On considère la norme définie par $||.||_\infty : P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto ||P||_\infty = \max_k |a_k|$.
On pose $F = \{P \in E\ ,\ P(1) > 0\}$. Montrons que F est un ouvert.

5. Soit $E = \mathbf{K}[X]$. On considère encore la norme définie par $||.||_\infty : P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto ||P||_\infty = \max_k |a_k|$.
Montrons cette fois que $F = \{P \in E\ ,\ P(1) > 0\}$ n'est pas un ouvert.

Proposition 13.1

Une boule ouverte $B(a,r)$ de E est un ouvert de E.

Démonstration :

Proposition 13.2

Notons $\mathscr{T}$ l'ensemble des ouverts de E.

1. Les ensembles $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathscr{T}$
2. L'ensemble $\mathscr{T}$ est stable par intersection **finie**. C'est-à-dire qu'une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.
3. L'ensemble $\mathscr{T}$ est stable par union quelconque. C'est-à-dire qu'une union d'ouverts est encore un ouvert.

Remarques :

1. L'ensemble des ouverts n'est pas stable par intersection quelconque. Par exemple si on pose $I_n =]0, 1+\frac{1}{n}[$ qui est un ouvert de $\mathbf{R}$. Alors $I = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} I_n =]0,1]$ qui n'est plus ouvert.
2. L'ensemble $\mathscr{T}$ des ouverts de E est ce que l'on appelle la topologie de E.

Démonstration :

1.2 Voisinages

Définition 13.2

Soit $a \in E$. Un voisinage de a dans E est une partie X de E telle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset X$.

Remarques :

1. On peut aussi dire que X contient un ouvert contenant a.
2. Dans le cas où $E = \mathbf{R}$ on étend la notion de voisinage pour définir les voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$. Un voisinage de $+\infty$ contient un intervalle de la forme $[M, +\infty[$ quand un voisinage de $-\infty$ contient un intervalle de la forme $]-\infty, m]$.

ATTENTION

Ne pas confondre les notions de voisinages et d'ouvert. Quand on parle d'un voisinage on parle toujours d'un voisinage **d'un point**.
Un ouvert est une partie de E qui est un voisinage de tous ses points.

Exemple : Dans $\mathbf{R}$, $[0,1]$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$. Par contre, ce n'est pas un voisinage de 1.

Proposition 13.3

Soit $a \in E$.

1. Soit $V_1, \ldots, V_n$ une famille **finie** de voisinages de a dans E, l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est encore un voisinage de a.
2. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a dans E. L'union $\bigcup_{i \in I} V_i$ est encore un voisinage de a.

Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition analogue dans le cas des ouverts.

Définition 13.3 (Propriété locale)

Soit P une propriété. On dit qu'elle est vraie au voisinage d'un point a de E, s'il existe un voisinage de a où elle est vérifiée.
Il est équivalent de dire qu'il existe une boule ouverte contenant a (ou même centrée en a) où la propriété est vraie.

Exemple : La fonction $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$ est bornée au voisinage de $a = (2, 1)$.

1.3 Fermés

Définition 13.4

Une partie X de E est un fermé si son complémentaire est ouvert.
On peut dire que X est un fermé ou que X est fermé (sous-entendu un ensemble fermé) voire fermée (une partie fermée).

Exemples :

1. Dans $E = \mathbf{R}$, un intervalle fermé $X = [a, b]$ est fermé puisque son complémentaire $\complement_E X =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est ouvert comme union de deux ouverts.
2. Les parties $\emptyset$ et E sont fermées.

ATTENTION

La notion d'ouverts et de fermés ne sont pas contraire l'une de l'autre. Une partie peut-être ouverte et fermée (par exemple E en entier) comme elle peut être ni ouverte ni fermé (par exemple $]0, 1]$).

Proposition 13.4 (Propriétés des fermés)

1. Soit X une partie de E, X est un ouvert si et seulement si $\complement_E X$ est un fermé.
2. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille finie de fermés. L'union $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ est un fermé.
3. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. L'intersection $\bigcap_{i \in I} X_i$ est un fermé.

Démonstration :

Proposition 13.5

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés. On considère l'espace vectoriel normé produit $(E_1 \times \dots \times E_n, N)$ où N est la norme produit. Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, on considère un fermé F_i de E_i. L'ensemble produit $Y = F_1 \times \dots \times F_n$ est un fermé de $(E_1 \times \dots \times E_n, N)$.
On dit qu'un produit fini de fermés est fermé.

Démonstration :

Proposition 13.6

Les boules fermées et les sphères sont fermées.
En particulier les singletons qui sont les sphères de rayon 0 sont des fermés.

Démonstration :

1.4 Points intérieurs et intérieur

Définition 13.5 (Points intérieurs)

Soit X une partie de E.

1. *Un point a de X est dit intérieur à X s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset X$.*
2. *L'ensemble des points intérieurs de X s'appelle l'intérieur de X. Il se note $\mathring{X}$.*

Par définition, $\mathring{X} \subset X$.

Remarque : Un point a de X est donc un point intérieur à X si X est un voisinage de a.
Exemples :

1. Soit $X =]0, 1]$.

2. Soit B la boule fermée de centre a et de rayon r. Ses points intérieurs sont ceux qui sont dans la boule ouverte de centre a et de rayon r. C'est-à-dire $\mathring{\overline{B}(a, r)} = B(a, r)$.

Proposition 13.7

Soit X une partie de E.

1. Son intérieur $\mathring{X}$ est ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans X.
2. On a donc : X ouvert $\Leftrightarrow \mathring{X} = X$.

Démonstration :
Exercices :

1. Determiner $\mathring{\mathbb{Q}}$.
2. Déterminer l'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict.

1.5 Points adhérents et adhérence

Définition 13.6

Soit X une partie de E.

1. *Un point a de E est un point adhérent à X si pour tout $\delta > 0$ la boule ouverte centrée en a de rayon δ rencontre X c'est-à-dire si $X \cap B(a, \delta) \neq \emptyset$.*
2. *L'ensemble des points adhérents à X s'appelle l'adhérence de X. Il se note $\overline{X}$*

Remarque : Tout point a de X est adhérent à X car $a \in X \cap B(a, \delta)$. On en déduit que $X \subset \overline{X}$.

Exemples :

1. On considère $X =]0, 1]$.

2. Soit $X = B(a, r)$.

Proposition 13.8

Soit X une partie de E,

$$\complement_E \mathring{X} = \overline{\complement_E X} \quad \text{et} \quad \widehat{\complement_E X}^{\circ} = \complement_E \overline{X}.$$

Démonstration :

Proposition 13.9

Soit X une partie de E.

1. L'adhérence $\overline{X}$ est le plus petit fermé contenant dans X.
2. On a donc : X est fermé $\iff X = \overline{X}$.

Démonstration :
Exercices :

1. Determiner $\overline{\mathbb{Q}}$.
2. Montrer que l'adhérence et l'intérieur sont croissant

1.6 Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés

La définition des fermés comme complémentaire des ouverts n'est pas la plus aisée pour montrer qu'un ensemble est fermé. Nous allons mettre en évidence, une méthode pour montrer qu'un point est un point d'adhérent à l'aide de suites. On en déduira une caractérisation des fermés.

Théorème 13.10 (Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés)

Soit X une partie de E.

1. Soit $a \in E$, il est adhérent à X (c'est-à-dire $a \in \overline{X}$) si et seulement s'il existe une suite (x_n) **d'éléments de** X qui converge vers a.
2. L'ensemble X est fermé si et seulement si toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge (dans E) a sa limite dans X.

Remarques :

1. La première assertion illustre bien qu'un point adhérent à X est bien un point qui appartient à X ou qui est juste « à coté » de X.
2. La deuxième assertion illustre la notion de fermé. Cela signifie que l'on ne peut pas « sortir » de X.
3. C'est souvent cette caractérisation que l'on utilise pour montrer qu'un ensemble est fermé.

Démonstration :

Proposition 13.11

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel. S'il est de **dimension finie** alors il est fermé.

Démonstration :

ATTENTION

Cela n'est plus vrai si F n'est pas de dimension finie. Considérons par exemple $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme $||.||_1$. Soit $F = \{f \in E\ ,\ f(0) = 0\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice : On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques, c'est-à-dire les matrices $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

1. $\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2\,, m_{ij} \geqslant 0$
2. $\forall j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\,, \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$.

Montrer que $S_n(\mathbf{R})$ est un fermé de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), ||.||_\infty)$

— En montrant que son complémentaire est ouvert.
— En utilisant la caractérisation séquentielle.

1.7 Frontière

Pour toute partie X de E, on a vu que $\mathring{X} \subset X \subset \overline{X}$. La frontière d'une partie est la différence entre son adhérence et son intérieur.

Définition 13.7

Soit $X \subset E$, on appelle frontière de X et on note $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$.

Remarque : Comme $\partial X = \overline{X} \cap \complement_E \mathring{X}$ c'est un fermé comme intersection de deux fermés.
Exemples :

1. Si X est une boule (ouverte ou fermée) de centre a et de rayon r alors $\overline{X}$ est la boule fermée et $\mathring{X}$ est la boule ouverte donc ∂X est la sphère $S(a,r)$.
2. Calculons $\partial]0,1]$.

3. Calculons $\partial\mathbf{Q}$.

1.8 Densité et approximation uniforme

La notion de parties denses vues en première année dans le cas où $E = \mathbf{R}$ s'étend au cadre général des espaces vectoriels normés.

Définition 13.8 (Densité)

Soit X une partie de E. Elle est dit dense (dans E) si $\overline{X} = E$. C'est-à-dire que tout point de E est adhérent à X.

Proposition 13.12

Soit X une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) X est dense

ii) Toute boule ouverte $B(a, \delta)$ où $\delta > 0$ rencontre X.

iii) Pour tout point a de E il existe une suite (x_n) d'éléments de X convergeant vers a.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les propositions vues sur les points adhérents. □

Exemples :

1. Dans le cours de première année on a vu que $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels sont dans dans $\mathbf{R}$. Il suffit d'approcher tout nombre par un décimal ou par $\pi + r$ où r est un décimal.
2. Montrons que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

En analyse, on cherche souvent à approcher une fonction donnée f par une fonction ayant de meilleurs propriétés.

Théorème 13.13

Soit $I = [a, b]$ un segment. On note $\mathscr{E}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathscr{E}(I, \mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{C}\mathscr{M}(I, \mathbf{K})$ pour la norme infinie. Cela signifie que :

— Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I, \mathbf{K})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathscr{E}(I, \mathbf{K})$ telle que $||f - \varphi||_\infty \leqslant \varepsilon$.

— Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I, \mathbf{K})$ il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 0} \in \mathscr{E}(I, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ telle que $(\varphi_n)_{n \geqslant 0} \underset{n \to +\infty}{\overset{||.||_\infty}{\longrightarrow}} f$. C'est-à-dire que la suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f.

Démonstration : Ce résultat a été vu en première année. □

Théorème 13.14 (Théorème de Weierstrass)

Soit $I = [a, b]$ un segment. On note $\mathrm{P}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathrm{P}(I, \mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$ pour la norme infinie. Cela signifie que :

— Pour toute fonction f continue sur I et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $||f - P||_\infty \leqslant \varepsilon$.

— Pour toute fonction f continue sur I il existe une suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions polynomiales telle que $(P_n)_{n \geqslant 0} \underset{n \to +\infty}{\overset{||.||_\infty}{\longrightarrow}} f$. C'est-à-dire que la suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers f.

Remarque : Ce résultat n'est plus vrai sur $\mathbf{R}$ en entier. On peut montrer que si (P_n) est une suite de fonctions polynomiales définies sur $\mathbf{R}$ telles que $P_n \overset{CU}{\longrightarrow} f$ alors f est encore une fonction polynomiale.

Démonstration : Voir devoir □

Exemple : Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. On suppose que pour entier n,

$$\int_a^b f(t) t^n dt = 0.$$

On veut montrer que la fonction f est nulle.

1.9 Invariance par changement de normes équivalentes

On a déjà vu que si on remplace la norme $||.||$ par une norme N qui lui est équivalente, on ne modifie pas le caractère convergent des suites. Nous allons voir que cela ne modifie pas toutes les propriétés topologiques définies précédemment.

Théorème 13.15

Soit $||.||$ et N deux normes équivalentes sur E et X une partie de E.

1. La partie X est fermée pour $||.||$ si et seulement si elle est fermée pour N.
2. La partie X est ouverte pour $||.||$ si et seulement si elle est ouverte pour N.
3. L'adherence (resp. l'intérieur) de X pour $||.||$ est l'adhérence (resp. l'intérieur) pour N.
4. La partie X est dense pour $||.||$ si et seulement si elle est dense pour N.

Démonstration :

1. Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle.
2. Cela découle de 1. en passant au complémentaire.
3. Pour l'adhérence (resp. l'intérieur) il suffit d'utiliser que c'est le plus petit fermé contenant X (resp. le plus grand ouvert contenu dans X).
4. Cela découle de l'invariance de l'adhérence.

□

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai pour des normes qui ne sont pas équivalentes.
On considère $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $X = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On considère sur E les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$.

1.10 Topologie induite

Soit A une partie de E les notions d'ouverts (et de fermés) de E permettent de définir des ouverts (et des fermés) de A.
Exemple : On considère $E = \mathbf{R}^2$ et A la boule fermée unité. On pose alors $H = \{(x, y) \in A\ ,\ x > 0\} \subset A$.

Définition 13.9

Soit X une partie de A. On dit que X est un ouvert relatif de A si pour tout x de X, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap A \subset X$.

ATTENTION

Il est important de voir que l'on ne demande pas que l'intégralité de la boule soit sans X mais juste $B(x, \delta) \cap A$ que l'on appelle sa *trace* sur A.

Définition 13.10

1. *Soit X une partie de A. On dit que c'est un fermé relatif de A si $\complement_A X$ est un ouvert relatif de A.*
2. *Soit X une partie de A et $x \in X$. On dit que X est un voisinage relatif de x dans A s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap A \subset X$.*

Exemples :

1. Pour $A = \mathbf{R}^*$, l'intervalle $X =]0, 1]$ est un fermé relatif.

2. Dans $A = \mathbf{N}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On considère $X = \{n_0\}$.

Proposition 13.16 (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit X une partie de A. C'est un fermé relatif de A si et seulement pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge **dans** A a sa limite dans X.

Démonstration : Il suffit de reprendre le principe de la démonstration de la caractérisation séquentielle.

Proposition 13.17

Soit A une partie de E.

1. La partie X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe un ouvert U de E tel que $X = U \cap A$. On dit que X est la trace de U.
2. La partie X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe un fermé F de E tel que $X = F \cap A$. On dit que X est la trace de F.

Démonstration :

2 Limite d'une application

2.1 Définition

Nous allons dans ce chapitre généraliser la notions de limite au cas des fonctions f d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ dans un autre $(F, ||.||_F)$. Cela généralise les cas déjà étudié en première année où $E = \mathbf{R}$ et $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 13.11

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point adhérent à A et $\ell \in F$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leqslant \eta \Rightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

Remarques :

1. C'est la même définition que cette de la limite d'une fonction définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Il faut juste remplacer la valeur absolue par la norme.
2. Dans le cas des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, la définition de la limite peut aussi s'écrire avec des intervalles. Là on peut l'écrire avec des boules.

$$(f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, x \in \overline{B}(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in \overline{B}(\ell, \varepsilon))$$

3. On peut écrire aussi écrire cette définition avec des inégalités strictes (ou des boules ouvertes). Notons (A) et (B) les assertions
   - (A) : « $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leqslant \eta \Rightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$ »
   - (B) : « $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E < \eta \Rightarrow ||f(x) - \ell||_F < \varepsilon$ »

   Vérifions qu'une fonction vérifie (A) si et seulement si elle vérifie (B)
   - $\boxed{(A) \Rightarrow (B)}$ Soit $\varepsilon > 0$. On peut utiliser l'assertion (A) pour $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x - a||_E \leqslant \eta$ implique que $||f(x) - \ell||_F \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que si $||x - a||_E < \eta \leqslant \eta$ alors $||f(x) - \ell||_F \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
   - $\boxed{(B) \Rightarrow (A)}$ Soit $\varepsilon > 0$. On peut utiliser l'assertion (A) pour ε. Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x - a||_E < \eta_1$ implique que $||f(x) - \ell||_F < \varepsilon$. Pour $\eta = \frac{\eta_1}{2}$ on a que si $||x - a||_E \leqslant \eta = \frac{\eta_1}{2} < \eta_1$ alors $||f(x) - \ell||_F < \varepsilon \leqslant \varepsilon$.
4. On peut reformuler cette définition avec des voisinages relatifs. En effet cela peut s'écrire que pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ il existe un voisinage relatif $\mathscr{U}$ de a dans A tel que $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}$.

Définition 13.12 (Extension aux cas où $a = \infty$ et $\ell = \infty$)

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$.

1. *On suppose que A n'est pas borné. On dit que f tend vers $\ell \in F$ quand $||x||_E \to \infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, ||x||_E \geqslant M \Rightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon.$$

   On note alors $f(x) \xrightarrow[||x||_E \to \infty]{} \ell$.
   ***Noter que c'est** $||x||_E \to \infty$ **et pas** $x \to \infty$.*
2. *Si $F = \mathbf{R}$. Soit a un point adhérent à A. On dit que f tend vers $+\infty$ quand $x \to a$ si*

$$\forall M \in \mathbf{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a||_E \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$$

   On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
   On définit de même le fait que f tende vers $-\infty$ en a.
3. *On suppose que $E = \mathbf{R}$ et que A n'est pas majoré. On dit que f tend vers $\ell \in F$ quand $x \to +\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, x \geqslant M \Rightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$$

   On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.
   Dans le cas où A n'est pas minoré, on définit de même la limite de f en $-\infty$.

Proposition 13.18 (Unicité de la limite)

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point adhérent à A. On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' dans F tels que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$. On a alors $\ell = \ell'$.

Démonstration : Il suffit de recopier la démonstration usuelle. □

Définition 13.13 (Limite)

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point adhérent à A et $\ell \in F$. Si f tend vers ℓ quand x tend vers a on dit que ℓ est la limite de f en a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \textit{ ou } \lim_a f = \ell$$

2.2 Propriétés

Proposition 13.19

Soit f une fonction de A dans F. Soit a adhérent à A et $\ell \in F$.

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\lim_{x \to a} ||f(x) - \ell||_F = 0\right)$$

Démonstration : Évident □

Exemple : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : M \mapsto AM$.
Montrons que $\lim\limits_{M \to I_n} f(M) = A$.

Proposition 13.20

Avec les mêmes notations. Si $\lim\limits_a f = \ell$ alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration : Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ par exemple. Il existe alors η tel que si x appartient à $B(a, \eta) \cap A$ alors $f(x) \in B(\ell, 1)$. □

Théorème 13.21 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit f une fonction de A dans F. Soit a un point adhérent à A et $\ell \in F$.

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbf{N}}, \lim(u_n) = a \Rightarrow \lim(f(u_n)) = \ell\right).$$

Démonstration :

Corollaire 13.22

La notion de limite d'une fonction n'est pas modifié si on remplace la norme de l'espace de départ et / ou de l'espace d'arrivé par une norme équivalente.

Corollaire 13.23

Soit $(F_1, ||.||_1), \dots, (F_n, ||.||_n)$ des espaces vectoriels normées. On pose $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ avec la norme produit notée $||.||_F$. Soit f une application d'une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ dans F. On note pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$ la i-eme composante de f de sorte que pour $x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
Soit a un point adhérent à A et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in F$.

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\forall i \in [\![1 ; n]\!], \lim_a f_i = \ell_i\right)$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le résultat analogue sur les limites de suites. □

Remarque : En particulier, si F est un espace de dimension finie et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de F. Pour $f : A \to F$, on peut noter $f_i = e_i^* \circ f$ la i-eme composante de f dans la base $\mathscr{B}$. On a alors pour a adhérent à A et $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_n e_n$:

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\forall i \in [\![1 ; n]\!], \lim_a f_i = \ell_i\right).$$

2.3 Composition et opérations

Proposition 13.24 (Limite d'une composée)

Soit $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ et $(G, ||.||_G)$ trois espaces vectoriels normées. Soit A une partie de E et B une partie de F. On considère f une application de A dans F telle que $f(A) \subset B$ et g une application de B dans G. Soit a un point adhérent de A et $b \in F$. On suppose que $\lim_a f = b$. Alors

1. Le point b est adhérent à B.
2. S'il existe $\ell \in G$ tel que $\lim_b g = \ell$ alors $\lim_a g \circ f = \ell$.

Démonstration :

Proposition 13.25 (Combinaisons linéaires)

Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point adhérent à A. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ (où $\mathbf{K}$ est le corps de base de F). Si $\lim_a f_1 = \ell_1$ et $\lim_a f_2 = \ell_2$ alors $\lim_a (f_1 + f_2) = \ell_1 + \ell_2$ et $\lim_a \lambda f_1 = \lambda \ell_1$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle et la linéarité des limites des suites. □

Proposition 13.26 (Produit)

Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point adhérent à A. On suppose que F est une algèbre et que $||.||_F$ vérifie qu'il existe $C > 0$, tel que pour $(y, y') \in F^2$, $||y \times y'||_F \leqslant C||y||_F||y'||_F$.
Si $\lim\limits_a f_1 = \ell_1$ et $\lim\limits_a f_2 = \ell_2$ alors $\lim\limits_a (f_1 \times f_2) = \ell_1 \times \ell_2$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle et la propriété analogue sur les suites. □

3 Continuité

3.1 Définition

Là encore, on généralise la notion de fonction continue en un point (où f est définie) et de fonctions continues.

Définition 13.14

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans F. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si f a une limite en a.

Remarque : La limite est alors nécessairement $f(a)$. On peut donc dire

$$(f \text{ est continue en } a) \iff \left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right).$$

Proposition 13.27 (Caractérisation séquentielle de la continuité en a)

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans F. Soit $a \in A$.

$$(f \text{ est continue en } a) \iff \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbf{N}}, \lim(u_n) = a \Rightarrow \lim(f(u_n)) = f(a)\right)$$

Proposition 13.28 (Combinaisons linéaires)

Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point de A. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ (où $\mathbf{K}$ est le corps de base de F). Si f_1 et f_2 sont continues en a alors $f_1 + f_2$ et λf_1 aussi.

Proposition 13.29 (Produit)

Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ à valeurs dans un autre $(F, ||.||_F)$. Soit a un point de A. On suppose que F est une algèbre et que $||.||_F$ vérifie qu'il existe $C > 0$, tel que pour $(y, y') \in F^2$, $||y \times y'||_F \leqslant C||y||_F||y'||_F$.
Si f_1 et f_2 sont continues en a alors $f_1 \times f_2$

Proposition 13.30 (Composition)

Soit $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ et $(G, ||.||_G)$ trois espaces vectoriels normées. Soit A une partie de E et B une partie de F. On considère f une application de A dans F telle que $f(A) \subset B$ et g une application de B dans G. Soit a un de A et $b = f(a)$. On suppose que f est continue en a et g est continue en b alors $g \circ f$ est continue en a.

Définition 13.15

Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans F. Elle est dite continue si elle est continue en tout point de A.
On note $\mathscr{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans F.

Proposition 13.31

1. L'ensemble $\mathscr{C}^0(A, F)$ des fonctions continues de A dans F est un sous-espace vectoriel de F^A.
2. Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés, soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications continues. L'application, $g \circ f$ est continue.
3. Soit E un espace vectoriel normé et F une algèbre normée par une norme vérifiant qu'il existe $C > 0$ tel que pour y, y' dans F, $||y \times y'|| \leqslant C||y|| \, ||f'||$.
   Soit f_1 et f_2 des applications continues de A dans F. Le produit $f_1 \times f_2$ est encore continue.
4. Soit f une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans F. On ne modifie pas le caractère continu en remplaçant la norme de E et/ou de F par une norme équivalente.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les propriétés vues précédemment en tout point a de A. □

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On note $||.||_\infty$ la norme infinie définie par

$$||.||_\infty : \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{k \in [\![0\,;\,n]\!]} |a_k|$$

On pose Δ l'endomorphisme de E défini par $\Delta : P \mapsto P'$. Montrons que Δ est continue.

2. Si on travaille pour $E = \mathbf{K}[X]$, l'application de dérivation Δ n'est plus continue (toujours pour la norme infinie). En effet, si on considère la suite $P_n = \frac{1}{n}X^n$, elle tend vers 0 mais $\Delta(P_n) = X^{n-1}$ ne tend pas vers $0 = \Delta(0)$ car $||X^{n-1}|| = 1$.

ATTENTION

Soit f une application entre deux espaces vectoriels normés E et F. En remplaçant la norme de E ou celle de F par une norme équivalente, on ne change pas les « topologies » de ce fait on ne modifie pas le caractère continu de f. Cependant, si les normes ne sont plus équivalentes, ce n'est plus vrai.
Par exemple, soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ et $F = \mathbf{R}$. On considère $\delta_0 : f \mapsto f(0)$.

— Si on utilise la norme infinie sur E alors f est continue. En effet, $|\delta_0(f)| = |f(0)| \leqslant ||f||_\infty$. On peut alors démontrer que δ_0 est continue comme ci-dessus (voir aussi plus loin).
— Si on utilise la norme 1 sur E alors f n'est pas continue. On peut le montrer en utilisant la suite de fonctions
$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{sinon} \end{cases}$$
La suite de fonctions (f_n) tend vers la fonction nulle mais pour autant $(\delta_0(f_n)) \longrightarrow 1 \neq 0$.

Définition 13.16 (Fonction polynomiale)

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
On appelle fonction polynomiale une application $f : E \longrightarrow \mathbf{K}$ de la forme
$$f : x \mapsto \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in [\![0\,;d]\!]^n} a_{i_1,\dots,i_n} e_1^*(x)^{i_1} \times \cdots \times e_n^*(x)^{i_n}$$
où $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et d est un entier naturel.

Exemples :

1. Dans le cas où $E = \mathbf{K}^n$, un fonction polynomiale est juste une fonction de la forme
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in [\![0\,;d]\!]^n} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \times \cdots \times x_n^{i_n}$$
Par exemple
$$f : (x, y, z) \mapsto xy + 3x^2z - xy^3z^2$$
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction déterminant det : $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ est une fonction polynomiale car
$$\det : M \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) M[1, \sigma[1]] \times \cdots \times M[n, \sigma[n]]$$

Remarque : La notion de fonction polynomiale ne dépend par de la base choisie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E et f une fonction polynomiale relativement à la base $\mathscr{B}$. Elle est donc de la forme

$$f : x \mapsto \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![\, 0\,;\, d\,]\!]^n} a_{i_1,\dots,i_n} e_1^*(x)^{i_1} \times \cdots \times e_n^*(x)^{i_n}$$

Si on note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. On sait que $X = PX'$ c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$,

$$e_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} P[i,j]\varepsilon_j'(x)$$

Il suffit alors de « faire le calcul » pour voir que f est aussi polynomiale par rapport à la base $\mathscr{B}'$.

Proposition 13.32

Les applications polynomiales sont continues.

Démonstration : Ce sont des sommes et des produits des e_i^* qui sont continues. □

Proposition 13.33

Soit f et g deux applications continues définies sur A et à valeurs dans F. On suppose qu'il existe une partie H dense dans A telle que f et g coïncident sur H alors $f = g$.

Démonstration :
Exemple : Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On la suppose continue et qu'elle vérifie que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

3.2 Caractérisation du caractère continu par les images réciproques

Théorème 13.34

Soit f une application d'une partie A de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'application f est continue.

ii) L'image réciproque de tout ouvert U de F est un ouvert relatif de A.

iii) L'image réciproque de tout fermé X de F est un fermé relatif de A.

Démonstration :
Exemples :

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(x, y) = x^2 + y^2$. Comme c'est une fonction polynomiale elle est continue. On en déduit que l'image réciproque du fermé $\{1\}$ c'est-à-dire la sphère $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est un fermé.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f une application polynomiale (par exemple une application linéaire). On considère les ensembles

$$A = \{x \in E\ ,\ f(x) = 0\}; A^+ = \{x \in E\ ,\ f(x) \geqslant 0\} \text{ et } A^{++} = \{x \in E\ ,\ f(x) > 0\}$$

3. On peut aussi utiliser la méthode ci-dessus pour des ensembles définis par plusieurs équations. Par exemple si on considère $E = \mathbf{R}_n[X]$ et A l'ensemble des polynômes dont tous les coefficients sont strictement inférieurs à 1 en valeur absolue.
   On note $(e_0^*, \ldots, e_n^*)$ les formes coordonnées de sorte que

$$A = \{P \in E\ ,\ \forall i \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]\,, |e_i^*(P)| < 1\}$$

Exercices :

1. Retrouver que l'ensemble des matrices stochastiques est fermé.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

3.3 Applications uniformément continues

Définition 13.17

Soit f une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans F. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in A^2, d(x,y) \leqslant \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon.$$

Remarques :

1. On peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.
2. En changeant la norme de E et/ou de F par une norme équivalente, on ne modifie pas le caractère uniformément continue d'une application.

Proposition 13.35

Soit f une application de $A \subset E$ dans F.
Si elle est uniformément continue **alors** elle est continue.

Démonstration : Il suffit de recopier la démonstration classique.

□

ATTENTION

Ce n'est pas une équivalence. L'application $f : x \mapsto x^2$ est continue sur sur $\mathbf{R}$ mais pas uniformément continue.

3.4 Applications lipschitziennes

Rappelons, ce qui a déjà été vu sur les applications lipschitziennes.

Définition 13.18 (Applications lipschitziennes)

Soit $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit f une application de $A \subset E$ dans F.

1. *Soit $k \in \mathbf{R}_+$. L'application f est dite k-lipschitzienne si*

$$\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$$

2. *L'application f est dite lipschitzienne s'il existe un réel positif k tel que f soit k-lipschitzienne.*

Exemple : L'application norme est 1-lipschitzienne. En effet soit E un espace vectoriel normé,

$$\forall (x, y) \in E^2, |||x||_E - ||y||_E| \leqslant ||x - y||_E$$

d'après la deuxième inégalité triangulaire.

Proposition 13.36

Soit f une application lipschitzienne. Elle est uniformément continue (et donc continue).

Démonstration : Si f est k-lipschitzienne. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre dans la définition de l'uniforme continuité $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. □

Exemple : L'application norme est donc continue.

ATTENTION

Là encore, ce n'est pas une équivalence. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ n'est pas lipschitzienne car

$$\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et que $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$
Cependant, elle est uniformément continue car elle est continue et que $[0,1]$ est un segment (théorème de Heine - voir plus loin).

Proposition 13.37

L'ensemble des applications lipschitiziennes de $A \subset E$ dans F est un espace vectoriel.

Définition 13.19 (Distance à une partie)

Soit $A \subset E$ un ensemble non vide. On appelle distance à A et on note $d(.,A)$ l'application

$$d(.,A) : \begin{array}{ccc} E & \mapsto & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a) \end{array}$$

Remarque : La partie $\{d(x,a) \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}_+$. Elle est donc minorée par 0. De ce fait elle admet une borne inférieure qui peut (ou pas) être atteinte.

Exemple : Soit $A =]0,1[$, $d(2,]0,1[) = 1$ mais il n'existe pas d'élément a de A tel que $d(2,a) = 1$.

Proposition 13.38

Soit $A \subset E$ une partie non vide. L'application $d(.,A)$ est lipschitzienne car

$$\forall (x,y) \in E^2, |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x - y|$$

Démonstration :

Exercice : Montrer que $\{x \in E \mid d(x, A) = 0\} = \overline{A}$.

3.5 Applications linéaires continues

Nous nous intéresserons la majorité du temps aux applications linéaires. Il y a alors un critère simple pour montrer qu'une application est continue.

Théorème 13.39

Soit f une application **linéaire** d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'application f est continue.

ii) L'application f est continue en 0.

iii) L'application f est lispchitzienne

iv) Il existe $C \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in E, ||f(x)||_F \leqslant C||x||_E$$

Remarque : En pratique on utilise quasiment toujours le critère *iv)* pour prouver qu'une application linéaire est (ou n'est pas continue).

Démonstration :

— *i)* $\Rightarrow$ *ii)* est évidente.

— *iii)* $\Rightarrow$ *i)* est déjà vu.

— *iv)* $\Rightarrow$ *iii)* a déjà été vu. Rappelons l'argument. On suppose *iv)*. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$||f(x) - f(y)||_F = ||f(x - y)||_F \leqslant C||x - y||_E.$$

— Montrons *ii)* $\Rightarrow$ *iv)*.

□

Notation : On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

On rappelle que pour $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$ on note $||f||_{\text{op}}$ ou $|||f|||$ la norme subordonnée (ou norme d'opérateurs) :

$$||f||_{\text{op}} = |||f||| = \sup\left\{\frac{||f(x)||_F}{||x||_E}\ ,\ x \neq 0_E\right\} = \sup\left\{||f(x)||_F\ ,\ x \in S(0,1)\right\}$$

On obtient ainsi une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$ qui est sous-multiplicative :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{L}_c(E, F), ||f \circ g||_{\text{op}} \leqslant ||f||_{\text{op}} \times ||g||_{\text{op}}$$

Proposition 13.40 (Généralisation aux applications bilinéaires)

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. On note $||.||_E$, $||.||_F$ et $||.||_G$ leur norme et on considère la norme produit pour $E \times F$. Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Elle est continue si et seulement si

$$\exists C \in \mathbf{R}, \forall (x, y) \in E \times F, ||B(x, y)||_G \leqslant C||x||_E||y||_F$$

Démonstration :

Proposition 13.41 (Généralisation aux applications multilinéaires)

Soit $E_1, \dots E_p$ des espaces vectoriels normés et G un vectoriel normé. Pour $i \in [\![1 ; p]\!]$ n note $||.||_i$ la norme sur E_i. On note $||.||_G$ la norme de G. Soit $\Phi : \prod_{i=1}^{p} E_i \longrightarrow G$ une application multilinéaire. Elle est continue (en normant $\prod_{i=1}^{p} E_i$ avec la norme produit) si et seulement si

$$\exists C \in \mathbf{R}, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, ||\Phi(x_1, \dots, x_p))||_G \leqslant C \prod_{i=1}^{p} ||x_i||_i$$