Exercice I

1. a) Pour $0 \leqslant x \leqslant y < R$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k x^k \leqslant \sum\limits_{n=0}^{n} a_k y^k$ car pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \geqslant 0$ et $x^k \leqslant y^k$.
Par passage aux limites dans les inégalités larges, $f(x) \leqslant f(y)$.
La fonction f est donc croissante sur $[0, R[$. Par le théorème de limite monotone, elle a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en R^-.

b) De plus on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, R|$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x)$$

car la somme d'une série à termes positifs est un des majorants de la suite de ses sommes partielles (puisque c'est le plus petit majorant de cette suite).
Par passage à la limite dans les inégalités larges quand $x \to R^-$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leqslant \ell$$

(on utilise ici la linéarité de la limite, qui permet de dire que la limite d'une somme d'un nombre FINI de fonctions a pour limite la somme des limites)
Or $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car la série **à termes positifs** $\sum(a_k R^k)$ diverge, donc la suite de ses sommes partielles a pour limite $+\infty$.
Par passage aux limites dans les inégalités larges, on a donc $+\infty \leqslant \ell$. Ainsi $\ell = +\infty$.

2. a) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ avec pour dérivée $x \mapsto (1 - x^2)^{-1/2}$.
Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) (-x^2)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3. \dots .(2n-1)}{2^n} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}
\end{aligned}$$

Par le théorème de primitivation des sommes de séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, on a donc

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin(x) - \arcsin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(avec $\arcsin(0) = 0$)

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p$$

avec $b_p = 0$ si p est pair, et $b_p = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{1}{2n+1}$ sinon, avec $n = \frac{p-1}{2}$.

On voit en particulier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} a_p x^p$ est au moins 1 car l'égalité ci-dessus est vraie sur l'intervalle $]-1,1[$. Il ne peut pas être strictement supérieur à 1 car la série $\sum_{p\geqslant 0} a_p x^p = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ diverge pour $x>1$ par la règle d'Alembert, puisque :

$$\frac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}} = x^2\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2(n+1))^2}\frac{2n+1}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\to} x^2 > 1$$

b) Les coefficients de ce développement en série entière sont tous positifs. De plus, arcsin a une limite finie ($\pi/2$) en 1^-.

Par la contraposée du résultat de la question précédente, la série $\sum_{p\geqslant 0} b_p 1^p$ converge.

En utilisant la continuité de la fonction arcsin en 1 et le théorème d'Abel radial,

$$g(1) = \arcsin(1) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} b_p 1^p$$

De plus, en utilisant que g est impaire et que $b_p = 0$ si p est pair,

$$g(-1) = -\arcsin(1) = -\sum_{p=0}^{\infty} b_p 1^p = \sum_{p=0}^{\infty} b_p (-1)^p$$

3. La fonction $h = \arcsin^2$ a pour dérivée sur $]-1,1[$ la fonction $h' : x \mapsto 2\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
De plus pour x dans cet intervalle

$$h''(x) = 2\frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}h'(x).$$

On en déduit que h' vérifie l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' = xy + 2$$

qui peut aussi s'écrire

$$y' = \frac{x}{1-x^2}y + \frac{2}{1-x^2}.$$

On voit de plus que $h'(0) = 0$ et donc h' vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in]-1,1[\quad y'(x) = \dfrac{x}{1-x^2}y(x) + \dfrac{2}{1-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (E)$$

De plus, comme l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 est résolue (normalisée) en y' et que son coefficient et son second membre sont continus, ce problème de Cauchy a une unique solution.

On cherche une solution g développable en série entière au voisinage de 0 de cette équation différentielle (E). On suppose donc qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ telle que

$$\forall x \in]-R,R[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
g \text{ vérifie (E)} &\iff \forall x \in]-R,R[, (1-x^2)g'(x) - xg(x) = 2\\
&\iff \forall x \in]-R,R[, (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\\
&\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 21\\
&\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n-1} x^n = 2\\
&\iff \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}] x^n = 2
\end{aligned}$$

Il suffit que,

— Pour $n=0$, $a_1 = 2$

— Pour $n \geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}$

Cela donne que

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2p}{1 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)} a_1.$$

Cependant, comme h' s'annule en 0, on regarde les solution g telle que $g(0) = 0$ c'est-à-dire $a_0 = 0$. On pose donc

$$g : x \mapsto 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

On applique la méthode de D'alembert pour déterminer le rayon de convergence de cette série. On pose $u_p = 2\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. On a donc

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{(2^{p+1}(p+1)!)^2}{(2p+3)!}\frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} x^2 = \frac{4(p+1)^2}{(2p+2)(2p+3)} x^2 \underset{p\to\infty}{\to} x^2.$$

On en déduit que la série $\sum_{p \geqslant 0} u_p x^{2p+1}$ converge si $x \in]0,1[$ et diverge si $x > 1$. Cela montre que la série entière définissant g à un rayon de convergence $R = 1 > 0$.

De plus, en remontant les calculs, la fonction g est une solution du problème de Cauchy étudié ; par unicité de la solution de notre problème de Cauchy, $g = h'$.

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin^2(x) - \arcsin^2(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\arcsin^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente, ce développement s'étend au segment $[-1,1]$ et 1 est le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice II

1. Pour comparer les quantités demandées, on effectue un changement de variable afin de se ramener à des intégrales sur un même segment.
   On effectue le changement de variable $t = xu$, $dt = xdu$ (la fonction $u \mapsto t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$). On obtient :
   $$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)xdu = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$$
   et donc
   $$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$$
   et idem avec y.
   Or pour tout $u \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(yu)$ car $xu \leqslant yu$ et car $f^{(n+1)}$ est croissante puisque sa dérivée $f^{(n+2)}$ est positive. De plus, $\frac{(1-u)^n}{n!} \geqslant 0$.
   Par croissance de l'intégrale, on a donc $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
   De plus, par positivité de l'intégrale et de $f^{(n+1)}$, $R_n(x) \geqslant 0$.
2. Soit $x \in]0,a[$. Soit $y \in]x,a[$ (un tel y existe).
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$$
   car par la formule de Taylor avec reste intégrale, $R_n(y) = f(y) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)\frac{y^k}{k!} \leqslant f(y)$ puisque y et les dérivées successives de f en 0 sont positifs.
   Par le théorème d'encadrement, on a donc $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (car y est fixé et $0 \leqslant \frac{x}{y} < 1$).
   Donc, toujours par la formule de Taylor avec reste intégrale,
   $$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)\frac{y^k}{k!} = f(x) - R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x) - 0 = f(x)$$
   Ainsi f est somme de sa série de Taylor (en 0) sur $]0,a[$. Cela vaut également trivialement en 0 ($f(0) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} 0$).
   Reprenant le raisonnement précédent, pour $-a < x < 0$, on a toujours
   $$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$$
   et, pour les mêmes raisons et puisque $x \leqslant -x$, $0 \leqslant \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(-x)}{(-x)^{n+1}}$.
   Ainsi $0 \leqslant \frac{|R_n(x)|}{|x|^{n+1}} \leqslant \frac{|R_n(-x)|}{|-x|^{n+1}}$. et par conséquent $|R_n(x)| \leqslant |R_n(-x)|$
   Or $|R_n(-x)| = R_n(-x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car $-x \in]0,a[$. Donc par le théorème d'encadrement, $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc la série de Taylor de f converge vers $f(x)$ au point x.