Exercice I

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On considère la série entière de terme général $u_n(x) = a_n x^n$. On suppose que son rayon de convergence (noté R) est strictement positif et que la série $(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n)$ est divergente. On note f la fonction somme.

   a) Justifier qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim\limits_{x\to R^-} f(x) = \ell$.

   b) En utilisant les sommes partielles, montrer que $\ell = +\infty$.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto \arcsin x$.

   a) Montrer qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$. On donnera les coefficients b_n du développement à l'aide de factorielles et on vérifiera que le rayon de convergence de la série entière trouvée est égal à 1.

   b) Montrer que pour tout x dans $[-1,1]$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

   [On évitera de se servir de la formule de Stirling. L'esprit du sujet est d'utiliser la question 1]

3) Reprendre la question 2) pour la fonction $h : x \mapsto \arcsin^2 x$.
   On pourra chercher une équation différentielle simple d'ordre 1 à coefficients polynomiaux vérifiée par h'.

Exercice II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a,a[$.
On suppose que pout tout $x \in]-a,a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1) Pour tout entier n, on pose $R_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

   Montrer que pour tout couple $(x,y) \in]0,a[^2$,

$$x < y \Rightarrow \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

   On pourra utiliser un changement de variables pour exprimer les intégrales.

2) En déduire que f est la somme de sa série de Taylor sur $[0,a[$ puis sur $]-a,a[$