1. Soit f, g deux éléments de F. On pose $h : x \mapsto e^{-x}f(x)g(x)$.
La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|h(x)| = e^{-x}|f(x)g(x)| \leqslant e^{-x}\frac{(f(x))^2 + (g(x))^2}{2}$$
car pour tout u, v dans $\mathbb{R}$, $|uv| \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}$ puisque $0 \leqslant (|u| - |v|)^2 = u^2 - 2|uv| + v^2$.
Comme f et g appartiennent à F, les fonctions $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ et $x \mapsto e^{-x}(g(x))^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto e^{-x}\frac{(f(x))^2+(g(x))^2}{2}$ aussi. On en déduit que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison.

2. a) Démontrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0, +\infty[\,, \mathbb{R})$.
La fonction nulle appartient à F donc $F \neq \emptyset$.
Soit f et g dans dans F et λ, μ deux réels. On considère alors la fonction
$$h : x \mapsto e^{-x}(\lambda f(x) + \mu g(x))^2 = \lambda^2 e^{-x}(f(x))^2 + 2\lambda\mu e^{-x}f(x)g(x) + \mu^2 e^{-x}(g(x))^2$$
La fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaires de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (en utilisant la question 1)). On en déduit que $\lambda f + \mu g \in F$ et donc F est un espace vectoriel.

b) Démontrons que l'application ϕ de $F \times F$ vers $\mathbb{R}$ définie par $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ a bien les propriétés qui en font un produit scalaire :
— Symétrie : soit f et g dans F, $(f|g) = (g|f)$ parce que le produit des réels $f(x)$ et $g(x)$ est commutatif pour tout t dans $\mathbb{R}^+$.
— Bilinéairité : grâce à la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans les réels , puis à la linéarité de l'intégrale, pour toutes fonctions f et g dans F et tous scalaires α et β,
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)]dx = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_1(x)dx + \beta\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_2(x)dx$$
On en déduit la bilinéarité par la symétrie.
— Positivité : pour toute fonction f de F, $(f|f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}(f(x))^2dx \geqslant 0$.
— Caractère défini : soit $f \in F$ telle que $(f|f) = 0$. L'application $x \mapsto e^{-x}\left(f(x)\right)^2$ est $\boxed{\text{continue}}$ et positive sur $[0, +\infty[\,$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(x)\right)^2 dx = 0$ implique que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x}(f(x))^2 = 0$. On en déduit que $f = \tilde{0}$ car $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas.

3. a) Soit $f \in E$ une fonction polynomiale. La fonction $x \mapsto (f(x))^2$ est aussi polynomiale. Elle est donc continue sur $[0, +\infty[$.
De plus $x \mapsto x^2(f(x))^2$ est aussi polynomiale ce qui implique que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}(f(x))^2 = 0$ c'est-à-dire que $e^{-x}(f(x))^2 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ l'est aussi. Finalement $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, $E \subset F$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties
$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = \left[e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx = \frac{1}{n+1}I_{n+1}$$

L'intégration par partie est possible car, comme $n+1>0$ la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{n+1}$ est nulle en 0 et que de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^{n+1}=0$.

On obtient donc $I_{n+1}=(n+1)I_n$. Comme de plus $I_0=1$, pour tout $n \geqslant 0$, $I_n=n!$.

4. a) On obtient aisément par des calculs directs ou la formule de Leibniz :
$L_0=1$, $L_1(X)=1-X$, $L_2(X)=X^2-4X+2$, $L_3=-X^3+9X^2-18X+6$.

   b) Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $\varphi_n^{(n)}$ à partir de $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}\ x^n$.
La dérivée $n-k$ième de $x \mapsto x^n$ est

$$x \longmapsto n.(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)} = n.(n-1)\cdots(k+1)x^k = \frac{n!}{k!}x^k$$

La dérivée $k$ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est $x \longmapsto (-1)^k\ e^{-x}$.
On en déduit que

$$\forall x\in[0,+\infty[\,,\varphi_n^{(n)}(x)=e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n!}{k!}x^k\right)$$

On a donc

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\left(\frac{n!}{k!}\right)^2x^k$$

Finalement, L_n est une fonction polynomiale de degré n et le coefficient de degré k est :

$$\boxed{a_{n,k}=\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\left(\frac{n!}{k!}\right)^2}$$

En particulier $a_{n,n}=(-1)^n, a_{n,n-1}=(-1)^{n-1}n^2$ et $a_{n,0}=n!$.

5. a) En utilisant toujours la formule de Leibniz pour calculer la dérivée kième de φ_n on a pour $k<n$ on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,+\infty[\,,\varphi_n^{(k)}(x) &= e^{-x}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\frac{n!}{((n-(k-j))!}x^{n-(k-j)}\\ &= e^{-x}x^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\frac{n!}{(n-k+j)!}x^j\end{aligned}$$

Comme $n-k>0$, $\varphi_n^{(k)}(0)=0$.

   b) En utilisant qu'une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$, la formule ci-dessus donne : $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (-1)^k\ x^n\ e^{-x}$

   c) Considérons $m<n$ et écrivons $(L_n|L_m)=\displaystyle\int_0^{+\infty}L_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx$
On effectue une intégration par partie.

$$\int_0^{+\infty}L_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx=\left[L_m(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx$$

L'intégration par partie est possible car le crochet converge et vaut 0 puisque $\varphi_n^{(n-1)}(0)=0$ d'après 5.a) et que d'après 5.b)

$$L_m(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx \underset{x\to+\infty}{\sim} (-1)^{n-1}\ x^nL_m(x)\ e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On obtient bien

$$(L_m|L_n) = -\int_0^{+\infty} L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx$$

En procédant de même, on peut faire en tout m intégration par parties. À chaque fois le crochet converge et vaut 0 pour les même raison. On en déduit que

$$(L_m|L_n) = (-1)^m \int_0^{+\infty} L_m^{(m)}(x)\varphi_n^{(n-m)}(x)dx$$

On a vu que $\deg(L_m) = m$. On en déduit que $L_m^{(m)}$ est un polynôme constant et même que $L_m^{(m)} = (-1)^m m!$ car le coefficient dominant de L_m est $(-1)^m$.
Finalement

$$(L_m|L_n) = (-1)^m(-1)^m m! \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-m)}(x)dx$$

Comme $m < m$, $n - m \geqslant 1$, on peut calculer directement la dernière intégrale.

$$(L_m|L_n) = m! \left[\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\right]_0^{+\infty} = 0$$

La deuxième égalité venant encore des résultats des questions 5.a) et 5.b).

d) Si $m = n$, par le même processus avec n intégrations par partie, on a :

$$(L_n|L_n) = (-1)^n \ (-1)^n \ n! \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-n)}(x)dx = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx = n! \ I_n = (n!)^2$$

6. On reconnaît : $\left(\dfrac{L_n}{n!}\middle|\dfrac{L_m}{m!}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$,

   C'est à dire que la famille $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.

7. a) Le polynôme P_n est une somme de polynômes de degré $n+2$. Il est de degré au plus $n+2$.
   D'après le calcul des coefficients de L_n faits en 4)
   le coefficient de x^{n+2} est : $(-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} = 0$.
   le coefficient de x^{n+1} est :

   $$(-1)^{n+1}(n+2)^2+(-1)^n(n+1)^2-(2n+3)(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(n^2+4n+4-n^2-2n-1-2n-3) = 0$$

   Cela montre que $P_n \in E_n$.

   b) On sait que $\alpha_k = \left(\frac{L_k}{k!}|P_n\right)$ car la base est orthonormale.

   c) Soit $Q \in E_n = \operatorname{Vect}(L_0, \cdots, L_n)$ donc $(Q|L_{n+1}) = 0$ car $(L_0, \cdots, L_{n+1})$ est une famille orthonormale.

   d) Soit R, Q deux éléments de E,

   $$(XQ|R) = \int_0^{+\infty} xQ(x)R(x)e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} Q(x)(xR(x))e^{-x}dx = (Q|XR)$$

   Soit k un entier tel que $k \leqslant n-1$, $(XL_{n+1}|L_k) = (L_{n+1}|XL_k) = 0$ par la question 7.c) car $\deg(XL_k) = k+1 \leqslant n$ et donc $XL_k \in E_n$.

   e) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par bilinéarité du produit scalaire :

   $$(P_n|L_k) = (L_{n+2}|L_k) + (XL_{n+1}|L_k) - (2n+3)(L_{n+1}|L_k) = 0$$

   On en déduit que $\alpha_k = \frac{1}{k!}(P_n|L_k) = 0$.

f) Les polynômes L_{n+1} et XL_n sont de degré $n+1$ et le coefficient de degré $n+1$ de $L_{n+1}+XL_n$ est $L_{n+1}+XL_n = (-1)^{n+1}+(-1)^n = 0$ d'où le résultat.
Notons $T_n = L_{n+1}+XL_n$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} (P_n|L_n) & = & (L_{n+2}|L_n)+(XL_{n+1}|L_n)-(2n+3)(L_{n+1}|L_n) \\ & = & (XL_{n+1}|L_n) \text{ d'après 5.c)} \\ & = & (L_{n+1}|XL_n) \text{ d'après 7.d)} \\ & = & (L_{n+1}|T_n)-(L_{n+1}|L_{n+1}) \\ & = & -(L_{n+1}|L_{n+1}) \text{ car } \deg(T_n)=n<n+1 \\ & = & -((n+1)!)^2 \end{array}$$

Donc $\alpha_n = \frac{1}{n!}\,(P_n|L_n) = -\frac{((n+1)!)^2}{n!}$.
Finalement, $P_n = L_{n+2}+(X-2n-3)L_{n+1} = -\frac{((n+1)!)^2}{n!}\frac{L_n}{n!} = -(n+1)^2\ L_n$, et donc

$$L_{n+2}+(X-2n-3)L_{n+1}+(n+1)^2L_n = 0$$

8. Soit $n \geqslant 1$.

a) Comme L_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $(-1)^n$, on peut factoriser L_n sous la forme :

$$L_n = (-1)^n\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{2r_i+1}\times\prod_{i=1}^{q}(X-\beta_i)^{s_i}\times\prod_{i=1}^{t}(X^2-\gamma_iX+\delta_i)^{t_i}$$

où $\alpha_1,\dots\alpha_p$ sont les éléments de Z_n, $\beta_1,\dots,\beta_q$ les racines réelles de L_n qui sont négatives ou nulles ou d'ordre de multiplicité pair. Le dernier facteur est l'ensemble des facteurs de degré 2 et irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On a donc pour $i\in[\![1,t]\!]$, $\gamma_i^2-4\delta_i<0$.
Soit $i\in[\![1,q]\!]$. Si $\beta_i\leqslant 0$, la fonction $x\mapsto(x-\beta_i)^{s_i}$ est continue et ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ sauf peut-être en 0. Elle est donc de signe constant. Si $\beta_i>0$ alors nécessairement s_i est pair. La fonction $x\mapsto(x-\beta_i)^{s_i}=((x-\beta_i)^2)^{s_i/2}\geqslant 0$. Elle est de signe constant sur $[0,+\infty[$.
Soit $i\in[\![1,t]\!]$, la fonction $x\mapsto(x^2-\gamma_ix+\delta_i)^{t_i}$ est positive donc de signe constant sur $[0,+\infty[$.
Cela montre que $Z_n=\emptyset$ alors $x\mapsto L_n(x)$ est de signe constant sur $[0,+\infty[$.
Or, comme $n\geqslant 1$, d'après 6), on a $(L_0|L_n)=0$. Ainsi :

$$0=(L_0|L_n)=\int_0^{+\infty}L_n(x)e^{-x}dx$$

Mais $x\longmapsto L_n(x)e^{-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, garde un signe constant sur $]0,+\infty[$, et donc y est identiquement nulle. Comme la fonction $x\mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas, la fonction L_n est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$. Le polynôme L_n ayant une infinité de racines, il est nul ce qui est absurde.
Finalement $Z_n\neq\emptyset$.

b) On a $S_n\in\mathbb{R}_m[X]=\mathrm{Vect}\,(L_0,\cdots,L_m)$ donc $(S_n|L_n)=0$ car on suppose $m<n$ et $(L_0,\cdots,L_n)$ est une famille orthonormale.
On a donc

$$0=(S_n|L_n)=\int_0^{+\infty}e^{-x}S_n(x)L_n(x)dx$$

Cependant, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$S_n(x)L_n(x)=(-1)^n\prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{2r_i+2}\times\prod_{i=1}^{q}(x-\beta_i)^{s_i}\times\prod_{i=1}^{t}(x^2-\gamma_ix+\delta_i)^{t_i}$$

On voit que $x \mapsto \prod_{i=1}^{p}(x-\alpha_i)^{2r_i+2} = \prod_{i=1}^{p}((x-\alpha_i)^2)^{r_i+1}$ est toujours positive donc $x \mapsto S_n(x)L_n(x)$ est de signe constant. Comme elle est aussi continue, comme précédemment, on obtient que le polynôme S_nL_n est le polynôme nul ce qui est absurde car S_n et L_n sont non nuls et $\mathbb{R}[X]$ intègre.

Ainsi $n \leqslant m$. Comme le polynôme L_n ne peut pas avoir strictement plus de n racines, $m = n$.

c) Ainsi L_n possède n racines distinctes dans $]0, +\infty[$. Or L_n est de degré n donc L_n possède exactement n racines distinctes simples, qui sont toutes dans $]0, +\infty[$.

9. a) On remarque que pour $x \in [0, +\infty[$, $\varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$. On notera $u : x \mapsto x$ ainsi $\varphi_{n+1} = u\varphi_n$. On applique alors la formule de Leibniz.

$$\varphi_{n+1}^{(n+1)} = (u\varphi_n)^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{p}{n+1} u^{(p)}\varphi_n^{(n+1-p)} = u\varphi_n^{(n+1)} + (n+1)\varphi_n^{(n)}$$

car la dérivée de u est la fonction constante égale à 1 et $u^{(p)} = 0$ pour $p \geqslant 2$.

De plus pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_n^{(n)}(x) = e^{-x}L_n(x)$. Par dérivation, $\varphi_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x}L_n(x) + e^{-x}L_n'(x)$. On obtient alors que pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= e^x\varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= e^x x\varphi_n(n+1) + (n+1)e^x\varphi_n^{(n)} \\ &= -xL_n(x) + xL_n'(x) + (n+1)L_n(x) \\ &= xL_n(x) + (n+1-x)L_n(x) \end{aligned}$$

C'est-à-dire $L_{n+1} = XL_n' + (n+1-X)L_n$.

b) On sait d'après 7.e) :

$$L_{n+2} + (X-2n-3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0.$$

D'après a),

$$L_{n+2} = XL_{n+1}' + (n+2-X)\,L_{n+1}.$$

d'où

$$\begin{gathered} XL_{n+1}' + (n+2-X)\,L_{n+1} + (X-2n-3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0 \\ XL_{n+1}' + (-n-1))\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0 \end{gathered}$$

Or par a), on a :

$$L_{n+1} = X.L_n' + (n+1-X)\,L_n \text{ et donc } L_{n+1}' = XL_n'' + (n+2-X)L_n' - L_n$$

Remplaçant dans l'égalité précédente, il vient :

$$\begin{gathered} X^2L_n'' + X(n+2-X)L_n' - XL_n - (n+1)[XL_n' + (n+1-X)L_n] + (n+1)^2\,L_n = 0 \\ X^2L_n'' + X(1-X)L_n' + nXL_n = 0 \end{gathered}$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on peut simplifier par X :

$$XL_n'' + (1-X)\,L_n' + nL_n = 0$$

Cela montre que $x \mapsto L_n(x)$ est donc solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xz'' + (1-x)z' + nz = 0$$