On désigne par F l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que la fonction $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout naturel n, on note φ_n et L_n les fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ_n.

1. Soit $(f, g) \in F^2$. Montrer que $x \mapsto e^{-x} f(x) g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. a) Etablir que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   b) Montrer que
   $$(f, g) \mapsto (f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx \text{ est un produit scalaire sur } F$$
   Dans la suite, on note $||.||$ la norme euclidienne associée.
3. a) Montrer que E est inclus dans F.
   b) Calculer pour tout naturel n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx$.

Dorénavant, on identifiera chaque polynôme avec la restriction de sa fonction polynomiale à $\mathbb{R}^+$.

4. a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la règle de Leibniz, déterminer L_n et montrer que c'est un élément de E.
   On précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de x^k dans l'expression de L_n. On explicitera en particulier $a_{n,n}$, $a_{n,n-1}$ et $a_{n,0}$.
5. a) Montrer que pour tout $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
   b) Donner un équivalent de $\varphi_n^{(k)}(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (n et k fixés).
   c) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Montrer que
   $$(L_m|L_n) = -\int_0^{+\infty} L'_m(x) \varphi_n^{(n-1)}(x) dx$$
   En déduire la valeur de $(L_m|L_n)$.
   d) De même, exprimer $(L_n|L_n)$ en fonction de n.
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n définie par : $\quad P_n = L_{n+2} + (X - 2n - 3) L_{n+1}$.
   a) Montrer que $P_n \in E_n$.

   Ainsi, P_n se décompose sur la base orthonormale $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{L_k}{k!}$.

   b) Rappeler la valeur des α_k en fonction du produit scalaire.
   Le but des questions suivantes est de déterminer les α_k.

c) Montrer que pour tout $Q \in E_n$, $(L_{n+1}|Q) = 0$.

d) Justifier que pour tout couple (R, Q) d'éléments de E^2, on a : $(XQ \mid R) = (Q \mid XR)$.
En déduire que $(X\ L_{n+1}|L_k) = 0$ pour $k \leqslant n-1$.

e) En déduire que $\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad (P_n|L_k) = 0$.
En déduire les valeurs de $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$.

f) Il reste donc à calculer α_n : montrer que $L_{n+1} + X\ L_n$ appartient à E_n ; en déduire la valeur de α_n.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} + (n+1)^2 L_n = 0$$

8. Cette question a pour objet de montrer que les zéros de L_n sont réels et strictement positifs lorsque $n \geqslant 1$.
Soit $n \geqslant 1$, on désigne par Z_n l'ensemble des zéros réels de L_n, appartenant à $]0, +\infty[$ et d'ordre de multiplicité impair.

a) Ecrire la forme générale de la décomposition de L_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. On isolera les facteurs correspondant aux éléments de Z_n.
Montrer que si Z_n est vide alors L_n est de signe constant au sens large sur $[0, +\infty[$.
En considérant $(L_0|L_n)$, montrer que Z_n est non vide.

b) Soit donc $Z_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$ et $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$.
On pose $S_n = \prod_{k=1}^{m} (X - u_k)$. En considérant $(S_n|L_n)$, montrer que l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction, et en déduire que $m = n$.

c) Déduire de ce qui précède que les zéros de L_n sont tous réels, simples et appartenant à $]0, +\infty[$.

9. a) Etablir : $L_{n+1} = XL'_n + (n+1-X)L_n$
On pourra remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$ *et utiliser la règle de Leibniz.*

b) En utilisant la relation de la question 7.e, montrer que L_n est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$x\ z''(x) + (1-x)z'(x) + n\ z(x) = 0$$