Exercice

1. Les partitions de $\{1,2,3\}$ sont $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$ et $\{\{1,2,3\}\}$. On en déduit que $T_3 = 5$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons A l'ensemble des partitions de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$. On partitionne A en séparant la taille de partie contenant l'élément $n+1$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note A_k l'ensemble des partitions de E telle que la partie contenant $n+1$ a $k+1$ éléments. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour se donner un élément de A_k il faut :
   - choisir les k autres éléments de la partie contenant $n+1$. Ces éléments sont pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - choisir une partition de l'ensemble obtenu en enlevant les éléments choisis précédemment. C'est un ensemble ayant $n-k$ éléments. Il y a donc T_{n-k} possibilités.

   On en déduit que $|A_k| = \binom{n}{k} T_{n-k}$ et donc
$$T_{n+1} = |A| = \sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} T_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$$

3. Montrons par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant n!$.
   - Pour $n = 0$, $T_0 = 1 \leqslant 0!$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T_k \leqslant k!$. En utilisant la formule ci-dessus,
$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$$
   - Par récurrence, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant n!$.

4. Soit $x = 1$. La suite $\left(\frac{T_n}{n!} 1^n\right)_{n \geqslant 0}$ est bornée car $0 \leqslant \frac{T_n}{n!} \leqslant 1$. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1. $\boxed{\text{En particulier } R > 0}$.

On note f la somme de cette série entière définie sur $]-R, R[$ par $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

5. La fonction f est dérivable sur $]-R, R[$ et pour $x \in]-R, R[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{T_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{T_k}{k!} \right) x^n$$
   On reconnait un produit de Cauchy. Cela montre que pour $x \in]-R, R[$, $\boxed{f'(x) = e^x f(x)}$.
   En résolvant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène, on obtient qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^{e^x}$. Comme de plus $f(0) = T_0 = 1$, on obtient que $\lambda = \frac{1}{e}$ et donc
$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = e^{e^x - 1}$$

6. Pour tout $x \in [0, R[$
$$f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (e^x)^k = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{kx} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

En échangeant les deux sommes ce qui est licite car tous les termes sont positifs,

$$f(x) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}\right)x^n$$

Par unicité du développement en série entier on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$$

On a utilisé que si on a deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif et que de plus les sommes coïncident sur $[0, R[$ alors pour tout entier n, $a_n = b_n$ puisque les coefficients s'obtiennent en calculant les dérivées n-ième des sommes en 0. C'est dérivées peuvent se calculer en utilisant la restriction sur $[0, R[$.

Problème

1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. L'application $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \ni \eta \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},(1)}(\eta) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (où (1) est la base canonique de $\mathbb{R}$) est un isomorphisme donc $\boxed{\dim(E^*) = \dim \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) = n}$.
2. Soient $\omega \in A(E)$ et $x \in E$. Par antisymétrie de ω, $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ donc $2\omega(x,x) = 0$ et comme $2 \neq 0$ on a $\boxed{\omega(x,x) = 0}$.
3. Soit $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
   a) Soient $x, y \in E$ et X et Y leurs matrices dans la base $\mathscr{B}$. Par bilinéarite de ω,

$$\omega(x,y) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_i b_j\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i \omega(b_i, b_j) y_j = X^T M Y$$

   où $\boxed{M = (\omega(b_i, b_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$.

   b) Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\omega(e_j, e_i) = -\omega(e_i, e_j)$ donc $\boxed{M \text{ est antisymétrique}}$.

   c) Notont $A_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement pour toute matrice $M \in A_n(\mathbb{R})$, l'application $\omega : E \times E \ni (x, y) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)^T M Y^T$ est bilinéaire et antisymétrique. Ainsi l'application de $A(E)$ dans le sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à tout $\omega \in A(E)$ associe $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$ est bijective. On vérifie aisément qu'elle est linéaire. C'est donc un isomorphisme de $A(E)$ vers $A_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\dim(A(E)) = \dim(A_n(\mathbb{R}))}$.

   $A_2(\mathbb{R})$ étant la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2 \neq 0$, $A(E)$ est de $\boxed{\text{dimension } 1}$ si E est de dimension 2.
   (Plus généralement, $A(E)$ est de dimension $n(n-1)/2$)

   d) Comme E est E^* sont de même dimension, ω est symplectique si et seulement si φ_ω est injective c'est-à-dire si et seulement si son noyau ne contient aucun élément non nul.
   Ainsi

$$\begin{aligned} (\mathscr{E}_1) &\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0\} \quad x \notin \ker \varphi_\omega \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \omega(x, ,.) \neq 0_{E^*} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in E \setminus \{0_E\}\ \exists y \in E \quad \omega(x,y) \neq 0_{\mathbb{R}}} \end{aligned}$$

   Notant $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi_\omega(e_j) = \omega(e_j, .) : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega(e_j, e_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_j, e_i) e_i^*(x)$$

   donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(\varphi_\omega(e_j)) = \begin{pmatrix} \omega(e_j, e_1) \\ \vdots \\ \omega(e_j, e_n) \end{pmatrix}$.
   Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*}(\varphi_\omega) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)}$.
   Donc

$$\boxed{(\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) \text{ est inversible}}$$

4. Supposons qu'il existe une forme symplectique ω sur E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E est $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$. D'après les questions précédentes, M est antisymétrique et inversible.
   Ainsi
   $$\det(M) = \det(-M^T) = (-1)^n \det(M^T) = (-1)^n \det(M)$$
   et comme $\det M \neq 0$, $(-1)^n = 1$ donc $\boxed{n \text{ est pair}}$.

Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n est un entier pair $\geqslant 2$.

5. Comme J_n est antisymétrique et $J_n = \mathrm{Mat}_{can}(\omega_0)$ où can est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), ω_0 est antisymétrique (cf question 3).
   De plus J_n est inversible car pour tout élément $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ de son noyau (avec $X_1, X_2 \in \mathscr{M}_{n/2}(\mathbb{R})$ on a $0 = -X_2$ et $0 = X_1$ donc $X = 0$.
   D'après la question 3), $\boxed{\omega_0 \text{ est une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω sur E. Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) = J_n$

6. Supposons E est de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est antisymétrique, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
   De plus cette matrice est inversible donc $\alpha \neq 0$.
   Posons $\mathcal{B}' = (\frac{1}{\alpha}e_1, e_2) = (e_1', e_2')$. C'est encore une base de E car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/\alpha \neq 0$, et
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\omega) = \begin{pmatrix} \omega(\frac{1}{\alpha}e_1, e_1) & \frac{1}{\alpha}e_1, e_2) \\ \omega(e_2, \frac{1}{\alpha}e_1) & \omega(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0/\alpha & \frac{-\alpha}{\alpha} \\ \frac{0}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{J_2}$$

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   a) Soit $u : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F.
      Soit G un supplémentaire de F dans E (un tel supplémentaire existe) et p le projecteur sur F parallèlement à G et $p' : E \to F$ sa corestriction à F.
      Soit $\boxed{\tilde{u} = u \circ p'}$. Alors $\tilde{u}$ est linéaire car u et p' le sont, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sa restriction à F est u.
   b) Notons $\breve{\omega}$ la restriction de ω à $F \times F$. C'est une forme bilinéaire antisymétrique (car ω est bilinéaire antisymétrique.
      Par la question 3), $\breve{\omega}$ est symplectique si et seulement si
      $$\forall x \in F \setminus \{0\} \; \exists y \in F \; 0 \neq \breve{\omega}(x, y) = \omega(x, y)$$
      c'est-à-dire
      $$\forall x \in F \setminus \{0\} \; x \notin F^{\omega}$$
      c'est-à-dire
      $$F \cap F^{\omega} \subset \{0\}$$
      L'inclusion réciproque est toujours vérifiée (car F et F^{ω} sont des s.e.v. de E).
      Donc $\boxed{\breve{\omega} \text{ est symplectique si et seulement si } F \cap F^{\omega} = \{0\}.}$
   c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F ?
      $$\boxed{\ker \psi_F = \{x \in E \; \omega(x, .)_{|F} = 0_{F^*}\} = \{x \in E \; \forall y \in F \; \omega(x, y) = 0\} = F^{\omega}}$$

Soit $u \in F^*$. Par la question précédente, il existe $\tilde{u} \in E^*$ telle que la restriction de $\tilde{u}$ à F soit u. Comme ω est symplectique, il existe $x \in E$ tel que $\tilde{u} = \varphi_\omega(x)$.
Alors $u = \tilde{u}_{|F} = \psi_F(x)$.
Ainsi $\boxed{\psi_F \text{ est surjective donc } Im\ \psi_F = F^*}$.

d) Appliquant le théorème du rang à ψ_F, il vient :

$$\boxed{\dim(E) = \dim Im\psi_F + \dim\ker\psi_F = \dim F^* + \dim F^\omega = \dim F + \dim F^\omega}$$

(en appliquant la question 1) à F)

e) Supposons que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F.
Alors F et F^ω sont en somme directe par la question 7)b), et ainsi par b) on a

$$E = F \oplus F^\omega$$

Par ailleurs pour tout $x \in F^\omega$, on a $\forall y \in F$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x) = -0 = 0$ donc $x \in (F^\omega)^\omega$.
Ainsi $F \subset (F^\omega)^\omega$.
Par ailleurs, par la question 7) appliquée à F^ω puis à F,

$$\dim((F^\omega)^\omega) = \dim(E) - \dim(F^\omega) = \dim F$$

donc $\boxed{F = (F^\omega)^\omega}$ et ainsi $F^\omega \cap (F^\omega)^\omega = F^\omega \cap F = \{0\}$.
Donc par la question 7)b), $\boxed{\text{la restriction de } \omega \text{ à } (F^\omega)^2 \text{ est symplectique}}$.

8. Montrons par récurrence que pour tout naturel pair non nul n, l'assertion $\mathcal{P}_n$: "pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n et toute forme symplectique ω sur E, il existe une base $\tilde{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$".
Par la question 6), l'assertion $\mathcal{P}_2$ est vraie.
Soit n un naturel pair non nul tel que $\mathcal{P}_n$.
Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n+2$ et ω une forme symplectique sur E.
Soit e_1 un vecteur non nul quelconque de E. Par la question 3)d), il existe un vecteur e_2 de E tel que $\omega(e_1, e_2) \neq 0$.
Par le raisonnement de la question 6), quitte à modifier e_1 on peut supposer que $\omega(e_1, e_2) = -1$.
Posons $F = Vect(e_1, e_2)$.
Soit $x \in F \cap F^\omega$.
Comme $x \in F$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = ae_1 + be_2$.
Comme $x \in F^\omega$ et comme $e_1, e_2 \in F$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(x, e_1) = a\omega(e_1, e_1) + b\omega(e_2, e_1) = a.0 + b.1 = b \\ 0 &= \omega(x, e_2) = a\omega(e_1, e_2) + b\omega(e_2, e_2) = a.(-1) + b.0 = -a \end{aligned}$$

Donc $a = b = 0$ et ainsi $x = 0_E$.
Ainsi $F \cap F^\omega \subset \{0_E\}$.
Par la question 7)e), F^ω est un supplémentaire de F dans E et la restriction de ω' de ω à $(F^\omega)^2$ est symplectique.

Or $\dim F^\omega = \dim E - \dim F = n + 2 - 2 = n$.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ de F^ω dans laquelle la matrice de ω' est $\begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$

Notons $\tilde{\mathscr{B}}$ la concaténée de (e_1, e_2) et de $\mathscr{B}'$. C'est une base de E car F et F^ω sont supplémentaires dans E, et la matrice de ω dans cette base est bien de la forme voulue car pour tous $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\omega(e_i, f_j) = 0$$

car $e_i \in F$ et $f_j \in F^\omega$.
Donc $\mathcal{P}_{n+2}$.
Par récurrence, on a $\mathcal{P}_n$ pour tout naturel pair non nul n.

9. Dans les notations précédentes, notons n la dimension de E $\tilde{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Alors la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2n})$ est une base de E dans laquelle la matrice de ω est $\boxed{J_n}$.

Partie II : Réduction simultanée

Dans cette partie on fixe deux formes symplectiques ω et ω_1 sur E.

10. Soit $x \in E$. L'unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall y \in E \omega_1(x, y) = \omega(a, y)$ est $\varphi_\omega^{-1}(\omega_1(a, .) = \varphi_\omega^{-1}(\varphi_{\omega_1}(x))$.
Donc $\boxed{\varphi_\omega^{-1} \circ \varphi_{\omega_1}}$ est l'unique application u de E dans E telle que

$$\forall x, y \in E \ \omega_1(x, y) = \omega(u(x), y)$$

.
De plus est linéaire bijective car φ_ω et φ_{ω_1} sont linéaires bijectives.
Soient $x, y \in E$.

$$\omega(x, u(y)) = -\omega(u(y), x) = -\omega_1(y, x) = \omega_1(x, y) = \omega(u(x), y)$$

Ainsi $\boxed{u \in \mathcal{S}}$.

Dans les questions 11 à 16, on suppose que E est de dimension 4.

11. Soit $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) = J_4$. Soit $U \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
   a) Pour tous x, y de E, notant X et Y leurs matrices dans la base $\mathscr{B}$, on a $\omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y)$ donc
   $$X^T J_4 U Y = (UX)^T J_4 Y = X^T U^T J_4 Y$$
   Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, appliquant la relation précédente à $x = e_i$ et $y = e_j$ on obtient :
   $$(J_4 U)[i, j] = (U^T J_4)[i, j]$$
   (où $A[i, j]$ désigne le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne d'une matrice A)
   Ainsi $\boxed{J_4 U = U^T J_4}$.

b) Soient $N,P,Q,R\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $U=\begin{pmatrix}N & P\\ Q & R\end{pmatrix}$.

La relation de la question précédente s'écrit :

$$\begin{pmatrix}-Q & -R\\ N & P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^T & -N^T\\ R^T & -P^T\end{pmatrix}$$

Ainsi $R=N^T$ et P et Q sont antisymétriques donc il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $P=\alpha J_2$ et $Q=\beta J_2$, et on a $U=\left(\begin{array}{cc}N & \alpha J_2\\ \beta J_2 & N^\top\end{array}\right)$.

c)

$$T=(-1)^2\chi_N+\alpha\beta=X^2-Tr(N)X+(\det(N)+\alpha\beta)$$

$$\begin{aligned}T(U) &= U^2-Tr(N)U+(\det N+\alpha\beta)I_4\\ &= \begin{pmatrix}N^2+\alpha\beta J_2^2 & \alpha(NJ_2+J_2N^T)\\ \beta(J_2N+N^TJ_2) & \alpha\beta J_2^2+(N^T)^2\end{pmatrix}-Tr(N)\left(\begin{array}{cc}N & \alpha J_2\\ \beta J_2 & N^\top\end{array}\right)+(\det N+\alpha\beta)\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or $J_2^2=-I_2$, $(N^T)^2=(N^2)^T$ et notant $N=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,

$$NJ+JN^T=\begin{pmatrix}b & -a\\ d & -c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b & -d\\ a & c\end{pmatrix}=Tr(N)J_2$$

D'où

$$\begin{aligned}T(U) &= \begin{pmatrix}N^2-Tr(N)N+(-\alpha\beta+\det N+\alpha\beta)I_2 & 0\\ 0 & \left(N^2-Tr(N)N+(-\alpha\beta+\det N+\alpha\beta)I_2\right)^T\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\chi_N(N) & 0\\ 0 & (\chi_N(N))^T\end{pmatrix}=\boxed{0}\quad\text{par Cayley-Hamilton.}\end{aligned}$$

Dans les questions 12 à 16, on suppose que u n'admet aucune valeur propre réelle.

12. T étant de degré 2, à coefficients réels et sans racine réelle, il a deux racines distinctes imaginaires (c'est-à-dire non réelles) conjuguées λ et $\bar\lambda$. Ainsi $T=(X-\lambda)(X-\bar\lambda)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Comme T annule U, U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Comme de plus U est à coefficients réels, la conjugaison dans $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ (conjugaison coefficient par coefficient) réalise un isomorphisme de $E_\lambda(U)$ vers $E_{\bar\lambda}(U)$ qui ont ainsi même dimension $\frac{4}{2}=2$ (on peut aussi se passer de cet isomorphisme et dire que quitte à échanger λ et $\bar\lambda$, on a $\dim E_\lambda(U)\geqslant 2$). Ainsi il existe $Y,Z\in E_\lambda(U)$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.

13. Notant $\bar Z=Z_1-iZ_2$ et $\bar Y=Y_1-iY_2$, $(\bar Z,\bar Y)$ est une base de $E_{\bar\lambda}(U)$ et donc $(Z,Y,\bar Z,\bar Y)$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.
Or $Z,Y,\bar Z,\bar Y\in Vect_{\mathbb{C}}(Z_1,Z_2,Y_1,Y_2)$. Donc (Z_1,Z_2,Y_1,Y_2) est $\mathbb{C}$-génératrice de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Etant de longueur 4, elle est $\mathbb{C}$-libre. Elle est *a fortiori* $\mathbb{R}$-libre donc c'est une $\mathbb{R}$-base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi $(z_1,z_2,y_1,-y_2)$ est une base de E.

14. Notons $\Omega:\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})^2\ni(V,W)\mapsto V^TJ_4W\in\mathbb{C}$. C'est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$, donc alternée, et pour tous $x,y\in E$ on a $\omega(x,y)=\Omega(X,Y)$ où X et Y sont les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$. De plus comme J_4 est réelle on a pour tous $V,W\in\mathscr{M}_{4,1}$, $\Omega(\bar V,\bar W)=\overline{\Omega(V,W)}$ et $\Omega(V,UW)=\Omega(UV,W)$.

$$\begin{aligned} \omega(z_1,z_2) &= \Omega(\frac{Z+\bar{Z}}{2},\frac{Z-\bar{Z}}{2i}) \\ &= \frac{1}{4i}\Big(\Omega(Z,Z)-\Omega(Z,\bar{Z})+\Omega(\bar{Z},Z)-\Omega(\bar{Z},\bar{Z})\Big) \\ &= \frac{1}{4i}\Big(0-\Omega(Z,\bar{Z})+\Omega(\bar{Z},Z)-0\Big) \end{aligned}$$

Or $\Omega(Z,\bar{Z}) = \Omega(\frac{1}{\lambda}UZ,\bar{Z}) = \frac{1}{\lambda}\Omega(Z,U\bar{Z}) = \frac{1}{\lambda}\Omega(Z,\overline{UZ}) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\Omega(Z,\bar{Z})$ et comme $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \neq 1$ car λ est imaginaire, on a $\Omega(Z,\bar{Z}) = 0$. Par conséquent $\Omega(\bar{Z},Z) = \bar{0} = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi } \omega(z_1,z_2) = 0. \text{ De même, } \omega(y_1,y_2) = 0.}$

$$\begin{aligned} \omega(z_1,y_1) &= \Omega(\frac{Z+\bar{Z}}{2},\frac{Y+\bar{Y}}{2}) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\Omega(Z,Y)+\Omega(Z,\bar{Y})+\Omega(\bar{Z},Y)+\Omega(\bar{Z},\bar{Y})\Big) \end{aligned}$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\Omega(Z,\bar{Y}) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\Omega(Z,\bar{Y})$ puis $\Omega(Z,\bar{Y}) = 0$ et $\Omega(\bar{Z},Y) = \bar{0} = 0$.
Ainsi $\Omega(Z,\bar{Y}) + \Omega(\bar{Z},Y) = -\Omega(Z,\bar{Y}) - \Omega(\bar{Z},Y)$ et donc

$$\begin{aligned} \omega(z_1,y_1) &= \frac{1}{4}\Big(\Omega(Z,Y)-\Omega(Z,\bar{Y})-\Omega(\bar{Z},Y)+\Omega(\bar{Z},\bar{Y})\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Omega(2iZ_2,2iY_2) \\ &= \boxed{-\omega(z_2,y_2)} \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \omega(z_1,y_2) &= \frac{1}{4i}\quad \Omega(Z+\bar{Z},Y-\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{4i}\Big(\Omega(Z,Y)-\Omega(Z,\bar{Y})+\Omega(\bar{Z},Y)-\Omega(\bar{Z},\bar{Y})\Big) \\ &= \frac{1}{4i}\Big(\Omega(Z,Y)+\Omega(Z,\bar{Y})-\Omega(\bar{Z},Y)-\Omega(\bar{Z},\bar{Y})\Big) \\ & \quad \text{car les deux termes centraux sont nuls} \\ &= \frac{1}{4i}\Omega(Z-\bar{Z},Y+\bar{Y}) \\ &= \boxed{\omega(z_2,y_1)} \end{aligned}$$

15. Reprenant les derniers calculs, $\omega(z_1,y_1) = \frac{1}{2}Re(\Omega(Z,Y))$ et $\omega(z_1,y_2) = \frac{1}{2}Im(\Omega(Z,Y))$. Ainsi $\Omega(Z,Y) \neq 0$ car sinon la matrice de ω dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$ serait nulle donc non inversible, ω ne serait pas symplectique.
Lorqu'on remplace Y par $Y' = \xi Y$ avec ξ non nul, Y' reste un vecteur propre de U associé à λ et indépendant de Z, et on a :

$$\omega(z_1,y_2') = \frac{1}{2}Re\Big(\xi\Omega(Z,Y)\Big) \text{ et } \omega(z_1,y_2') = \frac{1}{2}Im\Big(\xi\Omega(Z,Y)\Big)$$

Il suffit donc de poser $\xi = \frac{-2}{\Omega(Z,Y)}$ pour avoir $\boxed{\omega(z_1,y_1') = -1 \text{ et } \omega(z_1,y_2') = 1}$.

16. Posons $r = |\lambda| > 0$ (car z est imaginaire) et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = re^{-i\theta}$.
Comme U est réelle,

$$\begin{array}{rcl} UZ_1 & = & Re(UZ) = Re(\lambda Z) = rRe((\cos\theta - i\sin\theta)(Z_1 + iZ_2)) = r(\cos(\theta)Z_1 + \sin(\theta)Z_2) \\ UZ_2 & = & Im(UZ) = Im(\lambda Z) = rIm((\cos\theta - i\sin\theta)(Z_1 + iZ_2)) = r(-\sin(\theta)Z_1 + \cos(\theta)Z_2) \\ UY_1 & = & Re(UY) = Re(\lambda Y) = rRe((\cos\theta - i\sin\theta)(Y_1 + iY_2)) = r(\cos(\theta)Y_1 - \sin(\theta)(-Y_2) \\ U(-Y_2) & = & -Im(UY) = -Im(\lambda Y) = -rIm((\cos\theta - i\sin\theta)(Y_1 + iY_2)) = r(\sin(\theta)Y_1 + \cos(\theta)(-Y_2)) \end{array}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(u) = r\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}}$.

Par les questions 14) et 15), $\boxed{\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\omega) = J_4}$.
Rappelons qu'on a établi en 10) que $u = \varphi_\omega^{-1} \circ \varphi_{\omega_1}$ et en 3)d) que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*}(\varphi_\omega) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$.
Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\omega_1) = \frac{-1}{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} r\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix} = \boxed{r\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}}$$

Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de E ni sur l'endomorphisme u. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de u et une décomposition $P = P_1 \cdots P_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{R}[X]$. On note $F_j = \mathrm{Ker}\,[P_j(u)]$ pour $j = 1, \ldots, r$.

17. Comme $P_1, \ldots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et leur produit annule u, on a par le théorème de décomposition des noyaux : $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r}$
De plus $\boxed{\text{les } F_j \text{ sont stables par } u}$ en tant que noyaux de polynômes en u, qui commutent avec u.

18. Soient j et k appartenant à $\{1, \ldots, r\}$ et distincts.
Par récurrence immédiate, on montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p \in \mathcal{S}$ (défini à la question 10) et on en déduit que tout polynôme en u appartient à $\mathcal{S}$.
Soient $x \in F_j$ et $y \in F_k$.

$$0 = \omega(0_E, y) = \omega(P_k(u)(x), y) = \omega(x, P_k(u)(y))$$

Or F_j est u-stable donc $P_k(u)$-stable. Notant v l'endomorphisme de F_j induit par $P_k(u)$, on a $\ker v = F_j \cap F_k = \{0_E\}$. Ainsi v est injectif. Cormme F_j est de dimension finie, v est aussi surjectif.
Ainsi

$$\forall x \in F_j \ \forall z \in F_k \quad \omega(x, z) = 0$$

ce qui prouve que $\boxed{F_k \subset F_j^\omega}$.
Remarquons que pour tous $x, y \in E$,

$$\omega_1(x, u(y)) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(u^2(x), y) = \omega_1(u(x), y)$$

donc $\boxed{u \in \mathcal{S}_1}$ où $\mathcal{S}_1$ est défini comme $\mathcal{S}$, mais en remplaçant ω par ω_1.
Donc le raisonnement précédent s'applique aussi à ω_1 : $F_k \subset F_j^{\omega_1}$.

19. Par la question précédente, $F_j^\omega \supset \oplus_{k\neq j} F_k$. De plus les deux membres de cette inclusion ont même dimension $n - \dim F_j$ par la question 7)d) et car E est somme directes de tous les F_k.

Ainsi $\boxed{F_j^\omega = \oplus_{k\neq j} F_k \text{ et donc } F_j^\omega \cap F_j = \{0_E\}}$.

D'après la question 7)b), $\boxed{\text{la restriction de } \omega \text{ à } F_j^2 \text{ est symplectique}}$.

Le même raisonnement $\boxed{\text{s'applique aussi à } \omega_1}$.

20. On suppose que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$.

Donc χ_u s'écrit

$$\chi_u = P_1 \ldots P_r$$

où les P_i sont deux à deux premiers entre eux et soit des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ soit des carrés d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Par le théorème de Cayley-Hamilton et les trois questions précédentes, E est somme directe des $F_j = Ker(P_j(u)$ et les restrictions de ω et ω_1 à chacun des F_j^2 sont symplectiques.

D'après la question précédente et la question 4), les F_j sont de dimension paire.

$\boxed{\text{Montrons que pour tout } j \in [\![1, r]\!],\ \dim F_j = deg(P_j).}$

Notons U la matrice de u dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E.

Quitte à permuter les P_j, on peut supposer que pour $j \leqslant s$, $P_j = (X - \alpha_j)^{m_j}$ avec α_j réel et $m_j \in [\![1, 2]\!]$ et pour $s < j \leqslant r$, $P_j = (X - \lambda_j)_j^m (X - \bar{\lambda}_j)^{m_j}$ avec λ_j imaginaire et $m_j \in [\![1, 2]\!]$ les α_j, λ_j et $\bar{\lambda}_j$ étant 2 à 2 distincts.

La décomposition $\chi_U = \chi_u$ en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est alors

$$\chi_U = (X - \alpha_1)^{m_1} \ldots (X - \alpha_s)^{m_s} (X - \lambda_{s+1})^{m_{s+1}} (X - \bar{\lambda}_{s+1})^{m_{s+1}} \ldots (X - \bar{\lambda}_r)^{m_r}$$

Les sous-espaces caractéristiques *complexes* $\ker_{\mathbb{C}}(U - \alpha_1)^{m_1}, \ldots, \ker_{\mathbb{C}}(U - \bar{\lambda}_r)^{m_r}$ ont alors pour dimensions $m_1, m_2, \ldots, m_r, m_r$ (en calculant χ_u dans une base obtenue en concaténant des bases des sous-espaces caractéristiques).

De plus pour tout $j \in]\!]s, r]\!]$, le sous-espace *complexe* $\ker_{\mathcal{C}}(P_j(U))$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques $\ker(U - \lambda_j)^{m_j}$ et $\ker(U - \bar{\lambda}_j)^{m_j}$ (par décomposition des noyaux) donc sa dimension complexe est $2m_j$.

Le sous-espace *réel* $\ker_{\mathbb{R}}(P_j(u))$ a alors pour dimension (réelle) $2m_j$ car l'application $(X, Y) \mapsto X + iY$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $(\ker_{\mathbb{R}}(P_j(u)))^2$ dans $\ker_{\mathcal{C}}(P_j(U))$.

De même les sous-espaces réels $\ker_{\mathbb{R}} P_j(U)$ ont pour dimension m_j pour $j \leqslant s$.

On en déduit que les dimensions de $F_1, \ldots, F_r$ sont $m_1, \ldots, m_s, 2m_{s+1}, \ldots, 2m_r$. Etant tous de dimension paire, leur dimension est $\boxed{2 \text{ ou } 4}$.