Devoir surveillé 6

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème.

Exercice

Une partition d'un ensemble E est un ensemble P de parties toutes non vides de E, 2 à 2 disjointes et de réunion E.
Par exemple pour $E = \{1, 2\}$ les partitions sont $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$.
On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Ainsi $T_0 = T_1 = 1$ et $T_2 = 2$.

1. Donner les partitions de $\{1, 2, 3\}$. En déduire T_3.
2. Montrer que pour tout entier n, $T_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.
3. En déduire que pour tout entier n, $T_n \leqslant n!$.
4. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{T_n}{n!} x^n$. Justifier que son rayon de convergence R n'est pas nul.
5. Montrer que pour $x \in]-R, R[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

Problème (X-ENS MP 2017)

Dans tout le problème

- E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
- Id est l'application identité sur E : $\mathrm{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
- $\mathscr{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E,
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E,
- $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E,
- $\mathrm{A}(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et antisymétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\omega(\lambda x + y, z) = \lambda\omega(x, z) + \omega(y, z), \quad \omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z),$$
$$\omega(x, y) = -\omega(y, x).$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\omega(x, \cdot) : \quad \begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \omega(x, y) \end{aligned}$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\varphi_\omega : \quad \begin{aligned} E &\to E^* \\ x &\mapsto \omega(x, \cdot) \end{aligned}$$

Un élément ω de $\mathrm{A}(E)$ est appelé forme symplectique sur E si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
On note

- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
- I_n la matrice unité de taille n,
- lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs
$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$
- det l'application déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
- $M^\top$ la transposée de la matrice M.

On identifie tout élément de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

Partie I : Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n.
2. Montrer que $\omega(x, x) = 0$ pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et pour tout $x \in E$.
3. Soit $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
   a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x, y) \in E^2, \omega(x, y) = X^\top M Y$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathscr{B}$:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
   On notera alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$.

b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que $M^{\top}=-M$.

c) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{A}(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.

d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
$(\mathscr{E}_1)$: ω est une forme symplectique sur E.
$(\mathscr{E}_2)$: Pour tout $x \in E \backslash\{0\}$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.
$(\mathscr{E}_3)$: $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)$ est inversible.

4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E, alors E est de dimension paire.

Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n est un entier pair $\geqslant 2$.

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

$$\begin{array}{rccc}\omega_0: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & X^{\top} J_n Y\end{array}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω sur E. Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega)=J_n$

6. Traiter le cas où E est de dimension 2 .

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u: F \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\tilde{u}: E \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à F coincide avec u. On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega=\{x \in E: \forall y \in F, \omega(x, y)=0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned}\psi_F: \quad & E \rightarrow F^* \\ & x \mapsto \left.\varphi_\omega(x)\right|_F\end{aligned}$$

où $\left.\varphi_\omega(x)\right|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F.

b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega=\{0\}$.

c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F ?

d) Montrer que $\operatorname{dim}(F)+\operatorname{dim}\left(F^\omega\right)=\operatorname{dim}(E)$.

e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F, alors $E=F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathscr{B}}$ de E telle que

$$\operatorname{Mat}_{\widetilde{\mathscr{B}}}(\omega)=\begin{pmatrix}J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2\end{pmatrix}$$

9. Conclure.

Partie II : Réduction simultanée

Dans cette partie on fixe deux formes symplectiques ω et ω_1 sur E.

10. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\omega_1(x,y) = \omega(u(x),y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Montrer alors que u appartient à l'ensemble $\mathscr{S}$ défini par
$$\mathscr{S} = \left\{u \in \mathrm{GL}(E) : \forall (x,y) \in E^2, \omega(x,u(y)) = \omega(u(x),y)\right\}.$$

Dans les questions 11 à 16, on suppose que E est de dimension 4.

11. Soit $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\omega) = J_4$. Soit $U \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
    a) Quelle relation y a-t-il entre les matrices J_4 et U ?
    b) Montrer qu'il existe $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & N^\top \end{pmatrix}$.
    c) Déterminer, en fonction de N, α et β les coefficients du polynôme T défini par $T(X) = \det(N - XI_2) + \alpha\beta$. Montrer que T est un polynôme annulateur de U.

Dans les questions 12 à 16, on suppose que u n'admet aucune valeur propre réelle.
Le but des questions 12 à 16 est de montrer qu'il existe une base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $E, r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\omega) = J_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\omega_1) = r\begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix} \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

12. Montrer que U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et des vecteurs Z et Y de $\mathbb{C}^4$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$.
13. Soient Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que $Z = Z_1 + iZ_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. Soient $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in E^4$ de coordonnées respectives Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que $\widetilde{\mathscr{B}} := (z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est une base de E.
14. Montrer que
$$\begin{aligned} \omega(z_1, z_2) &= \omega(y_1, y_2) = 0 \\ \omega(z_1, y_1) &= -\omega(z_2, y_2) \\ \omega(z_1, y_2) &= \omega(z_2, y_1) \end{aligned}$$
15. Montrer que, quitte à remplacer Y par ξY avec $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ bien choisi, on a $\omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, y_2) = 0$.
16. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(u) = r\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$.

    Conclure.

Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de E ni sur l'endomorphisme u. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de u et une décomposition $P = P_1 \cdots P_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{R}[X]$. On note $F_j = \mathrm{Ker}\left[P_j(u)\right]$ pour $j = 1, \ldots, r$.

17. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ et que F_j est stable par u pour $j = 1, \ldots, r$.
18. Montrer que, pour tous j et k appartenant à $\{1, \ldots, r\}$ et distincts, on a $F_k \subset F_j^{\omega}$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$ (la notation F^ω est définie en question 7).

On dit alors que $F_1, \ldots, F_r$ sont deux à deux orthogonaux pour ω et pour ω_1.

19. En déduire que, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, les restrictions de ω et ω_1 à $F_j \times F_j$ sont des formes symplectiques sur F_j.
20. On suppose que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que E est la somme directe de sous-espaces de dimension 2 ou 4 , deux à deux orthogonaux pour ω et ω_1, et sur lesquels les restrictions de ω et ω_1 sont des formes symplectiques.