Exercice

1. Les partitions de $\{1,2,3\}$ sont $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$ et $\{\{1,2,3\}\}$. On en déduit que $T_3 = 5$.
2. Montrons par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant n!$.
   — Pour $n = 0$, $T_0 = 1 \leqslant 0!$.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T_k \leqslant k!$. En utilisant la formule ci-dessus,
   $$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$$
   — Par récurrence, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant n!$.
3. Soit $x = 1$. La suite $\left(\frac{T_n}{n!} 1^n\right)_{n \geqslant 0}$ est bornée car $0 \leqslant \frac{T_n}{n!} \leqslant 1$. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1. $\boxed{\text{En particulier } R > 0}$.

On note f la somme de cette série entière définie sur $]-R,R[$ par $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

4. La fonction f est dérivable sur $]-R,R[$ et pour $x \in]-R,R[$,
   $$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{T_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{T_k}{k!} \right) x^n$$
   On reconnait un produit de Cauchy. Cela montre que pour $x \in]-R,R[$, $\boxed{f'(x) = e^x f(x)}$.
   En résolvant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène, on obtient qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^{e^x}$. Comme de plus $f(0) = T_0 = 1$, on obtient que $\lambda = \frac{1}{e}$ et donc
   $$\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = e^{e^x - 1}$$
5. Pour tout $x \in [0,R[$
   $$f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (e^x)^k = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{kx} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$
   En échangeant les deux sommes ce qui est licite car tous les termes sont positifs,
   $$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n$$
   Par unicité du développement en série entier on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$
   On a utilisé que si on a deux séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n x^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif et que de plus les sommes coïncident sur $[0,R[$ alors pour tout entier n, $a_n = b_n$ puisque les coefficients s'obtiennent en calculant les dérivées n-ième des sommes en 0. C'est dérivées peuvent se calculer en utilisant la restriction sur $[0,R[$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons A l'ensemble des partitions de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$. On partitionne A en séparant la taille de partie contenant l'élément $n+1$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note A_k l'ensemble des partitions de E telle que la partie contenant $n+1$ a $k+1$ éléments. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour se donner un élément de A_k il faut :
   - choisir les k autres éléments de la partie contenant $n+1$. Ces éléments sont pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
   - choisir une partition de l'ensemble obtenu en enlevant les éléments choisis précédemment. C'est un ensemble ayant $n-k$ éléments. Il y a donc T_{n-k} possibilités.

   On en déduit que $|A_k| = \binom{n}{k} T_{n-k}$ et donc

$$T_{n+1} = |A| = \sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} T_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$$

Problème

Partie I

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme P appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$ si et seulement si $P(0) = P(1) = \ldots = P(n) = 0$. On en déduit que P a au moins $n+1$ racines. Comme P est de degré au plus $k \leqslant n$, P est le polynôme nul. On a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi_k) = \{0\}}$. On en déduit que φ_k est injective.

   b) On utilise le théorème du rang qui affirme que $\mathrm{rg}(\varphi_k) = \dim(\mathbb{R}_k[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_k))$. D'après ce qui précède, $\mathrm{rg}(\varphi_k) = \dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$.

   c) On a montré que φ_k est injectif. De plus, il est surjectif si et seulement $k+1 = n+1$. Finalement $\boxed{\varphi_k \text{ est un isomorphisme si et seulement si } k = n}$.

2. a) D'après la question 1.c) l'application φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. De ce fait $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a un unique antécédent par φ_n ce qui signifie qu'il existe un unique polynôme Y tel que $\varphi_n(Y) = (y_0, \ldots, y_n)$ c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $Y(i) = y_i$.

   b) Soit $j \in [\![0, n]\!]$ on peut poser $x_0 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$ et $x_j = 1$. En appliquant la question précédente, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_j(i) = x_i = \delta_{i,j}$.

   c) On reconnait la base des polynômes de Lagrange. On voit que c'est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Il suffit donc de montrer que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des scalaires tels que $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. En évaluant en $i \in [\![0, n]\!]$ on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(i) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}(i) \iff \lambda_i = 0$$

   Cela montre que la $\boxed{\text{famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est libre ; c'est donc une base}}$.

   d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On le décompose dans la base $\mathscr{L}$: $P = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j L_j$. En évaluant en 0, 1,… on obtient que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P(j) = \lambda_j L_j(j) = \lambda_j$. On a donc $\boxed{P = \sum\limits_{j=0}^{n} P(j) L_j}$.

3. On suppose que $k = n$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2 \geqslant 0$. De plus pour le polynôme Y défini ci-dessus, $\Delta(Y) = 0$. On en déduit que m_0 existe et vaut 0.

Partie II

4. Montrons que $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire.
   — Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle P|Q \rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i) = \langle Q|P \rangle$.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

$$\langle P|\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)(\lambda_1 Q_1(i) + \lambda_2 Q_2(i)) = \lambda_1 \langle P|Q_1 \rangle + \lambda_2 \langle P|Q_2 \rangle$$

   On en déduit que $\langle \mid \rangle$ est linéaire à droite et donc bilinéaire par symétrie.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|P \rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)^2 \geqslant 0$.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\langle P|P\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)^2 = 0$. C'est une somme de nombres positifs qui est nulle. On en déduit que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(i)^2 = 0$ et donc $P(i) = 0$. Le polynôme P a donc au moins $n+1$ racines, comme il est de degré au plus n, c'est le polynôme nul.

On a bien montré que $\boxed{\langle\ |\ \rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

5. a) Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec $i \neq j$,

$$\langle L_i|L_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(k)L_j(k) = L_j(i) = 0$$

La deuxième égalité venant du fait que $L_i(k) = 0$ si $k \neq i$. La famille $\mathscr{L}$ est donc orthogonale.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$,

$$||L_i|| = \sqrt{\langle L_i|L_i\rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} L_i^2(k)} = 1$$

Cela montre que $\mathscr{L}$ est une famille orthonormée.

b) On voit que

$$\langle 1|1\rangle = \sum_{i=0}^{n} 1 = \boxed{n+1} \text{ et } \langle 1|X\rangle = \sum_{i=0}^{n} 1 \times i = \boxed{\tfrac{n(n+1)}{2}}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{p=1}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Le cas $N = 1$ est évident. Supposons que la propriété est vraie pour un entier $N \geqslant 1$ et démontrons-la pour $N+1$.

$$S_{N+1} = S_N + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 = \frac{(N+1)(N(2N+1) + 6(N+1))}{6}$$

Or $N(2N+1) + 6(N+1)) = 2N^2 + 7N + 6 = (N+2)(2N+3)$. On en déduit que

$$S_{N+1} = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$$

Cela achève la récurrence.
On en déduit que

$$\langle X|X\rangle = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

6. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$||Y - P||^2 = \langle Y - P|Y - P\rangle = \sum_{i=0}^{n}(Y(i) - P(i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(i))^2 = \Delta(P)$$

b) On voit que

$$\min\{\Delta(P)\ ,\ P \in \mathbb{R}_k[X]\} = \min\{||Y - P||^2\ ,\ P \in \mathbb{R}_k[X]\} = (d(P, \mathbb{R}_k[X]))^2$$

Il existe donc un unique polynôme P_k qui est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $m_k = ||Y - P_k||^2 = \Delta(P_k)$.
En particulier, $Y - P_k$ appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_k[X]$.

c) On cherche $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ tel que $Y - P_0$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$. On pose $P_0 = a1$. Il doit vérifier que $\langle Y - P_0 | 1\rangle = 0$ c'est-à-dire $\langle P_0|1\rangle = \langle Y|1\rangle$. Or $\langle P_0|1\rangle = a\langle 1|1\rangle = (n+1)a$ et $\langle Y|1\rangle = \sum_{i=0}^{n} y_i$. Finalement $\boxed{P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i}$.

De plus comme $Y - P_0 \perp P_0$, $||Y||^2 = ||P_0||^2 + ||Y - P_0||^2$ ce qui implique

$$m_0 = ||Y - P_0||^2 = ||Y||^2 - ||P_0||^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

d) On voit que

$$\langle Y|1\rangle = \sum_{i=0}^{n} y_i = q - q = \boxed{0} \text{ et } \langle Y|X\rangle = \sum_{i=0}^{n} iy_i = \sum_{i=0}^{q-1} i - \sum_{i=q}^{2q-1} i = \frac{(q-1)q}{2} - \frac{q(3q-1)}{2} = \boxed{-q^2}$$

On calcule le projeté orthogonal P_1 de Y sur $\mathbb{R}_1[X]$. On pose $P_1 = aX + b$. En procédant comme ci-dessus, on obtient que a, b vérifie le système

$$\begin{cases} a\langle X|1\rangle + b\langle 1|1\rangle &= \langle Y|1\rangle \\ a\langle X|X\rangle + b\langle 1|X\rangle &= \langle Y|X\rangle \end{cases}$$

C'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2}a + (n+1)b &= 0 \\ \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}a + \dfrac{n(n+1)}{2}b &= -q^2 = -\dfrac{(n+1)^2}{4} \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} na + 2b &= 0 \\ 2n(2n+1)a + 6nb &= -3(n+1) \end{cases}$$

On en déduit que $a = -\dfrac{3(n+1)}{n(n+2)}$ et $b = \dfrac{3(n+1)}{2(n+2)}$.

Finalement $\boxed{P_1 = -\dfrac{3(n+1)}{n(n+2)}X + \dfrac{3(n+1)}{2(n+2)} = -\dfrac{3(n+1)}{2n(n+2)}(2X - n)}$

Partie III

7. Comme $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k + 1$ et que $\dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = k$, $\dim(F_k) = 1$.

8. a) Soit $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. D'après la condition ii), $(B_0, \ldots, B_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant k-1}$ telle que $R = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i X^i$. La famille $(B_0, \ldots, B_k)$ étant orthogonale on obtient que $\boxed{\langle B_k|R\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \langle B_k|B_i\rangle = 0}$

De même, par définition du projeté orthogonal $X^k - Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$ donc $\boxed{\langle X^k - Q_k|R\rangle = 0.}$

On vient de monter que B_k et $X^k - Q_k$ appartiennent à F_k qui est de dimension 1. Les deux polynômes sont donc colinéaires.

b) La question précédente montre qu'une si une famille $(B_0, \dots, B_n)$ vérifie les trois conditions alors $B_0 = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = \binom{2k}{k}(X^k - Q_k)$.

Réciproquement cette famille vérifie les conditions i) et iii) de manière évidente. De plus si $0 \leqslant k < k' \leqslant n$ alors $B_k \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{k'-1}[X]$ et $B_{k'} \in \mathbb{R}_{k'-1}[X]^\perp$. On en déduit que $\langle B_k | B_{k'} \rangle = 0$. La condition ii) est vérifiée puisque de plus une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre et donc $(B_0, \dots, B_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

c) On procède comme à la fin de la partie II pour calculer Q_1 et Q_2.

Le polynôme Q_1 est le projeté orthogonal de X sur $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$. Il est de la forme $Q_1 = a1$. De plus $X - Q_1 \perp 1$ ce qui implique que $\langle X|1\rangle - a\langle 1|1\rangle = 0 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} - a(n+1) = 0$.

On obtient $\boxed{Q_1 = \frac{n}{2}}$ puis $\boxed{B_1 = \binom{2}{1}(X - Q_1) = 2X - n}$.

De même, le polynôme Q_2 est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$. Il est de la forme $Q_2 = aX + b$. De plus $X^2 - Q_2 \perp 1$ et $X^2 - Q_2 \perp X$ ce qui implique que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle 1|X\rangle a + \langle 1|1\rangle b & = & \langle 1|X^2\rangle \\ \langle X|X\rangle a + \langle X|1\rangle b & = & \langle X|X^2\rangle \end{array}\right.$$

ce qui équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3na + 6b & = & n(2n+1) \\ (4n+2)a + 6b & = & 3n(n+1) \end{array}\right.$$

En résolvant le système on obtient $a = n$ et $b = -\frac{n(n-1)}{6}$. Ce qui donne que $\boxed{Q_2 = nX - \frac{n(n-1)}{6}}$ et donc $\boxed{B_2 = 6X^2 - 6nX + n(n-1)}$.

9. Soit $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, on pose $U = B_k(n - X)$. On a

$$\langle U|R\rangle = \sum_{i=0}^{n} U(i)R(i) = \sum_{i=0}^{n} B_k(n-i)R(i) \underset{j=n-i}{=} \sum_{j=0}^{n} B_k(j)R(n-j) = \langle B_k|S\rangle = 0$$

car $S = R(n - X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On en déduit que $U \in F_k$. Cet espace étant de dimension 1, $B_k(n-X)$ est colinéaire à B_k. Comme de plus son coefficient dominant est $(-1)^k$, on obtient que $\boxed{B_k(n - X) = (-1)^k B_k(X)}$.

10. a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $C_k = \frac{B_k}{||B_k||}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la famille $(C_0, \dots, C_k)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme P_k étant le projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_k[X]$ du polynôme Y,

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \langle Y|C_i\rangle C_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y|B_i\rangle}{\langle B_i|B_i\rangle} B_i$$

b) On en déduit que

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle Y|B_i\rangle}{||B_i||^2} B_i = P_{k-1} + \frac{\langle Y|B_k\rangle}{||B_k||^2} B_k$$

De même $Y = P_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\langle Y|B_i\rangle}{||B_i||^2} B_i$ donc $m_k = ||Y - P_k||^2 = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \frac{\langle Y|B_i\rangle^2}{||B_i||^2}$. On en déduit que

$$\boxed{m_k = m_{k-1} - \frac{\langle Y|B_k\rangle^2}{||B_k||^2}}$$

11. a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, $XB_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$. On peut le décomposer dans la base $(B_0, \ldots, B_{k+1})$ donc il existe $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant k+1}$ tels que $\boxed{XB_k = \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j B_j}$

Par la même méthode que ci-dessus, $\boxed{\lambda_j = \dfrac{\langle XB_k | B_j \rangle}{||B_j||^2}}$

b) Soit P, Q et R des polynômes tels que PQ et QR sont de degré au plus n.

$$\langle PQ | R \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)R(i) = \langle P | QR \rangle$$

c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, k-2]\!]$.

$$\langle XB_k | B_j \rangle = \langle B_k | XB_j \rangle = 0$$

La dernière égalité vient du fait que $\deg(XB_j) = j + 1 \leqslant k - 1$.

d) On vient de voir que pour $j \leqslant k-2$, $\lambda_j = \dfrac{\langle XB_k | B_j \rangle}{||B_j||^2} = 0$. On en déduit que

$$XB_k = \gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k + \alpha_k B_{k-1}$$

e) On sait que le coefficient dominant de XB_k est $\binom{2k}{k}$. Donc $XB_k = \binom{2k}{k} X^{k+1} + R_k$ où $\deg(R_k) \leqslant k$. De même comme $\deg(B_{k-1}) \leqslant \deg(B_k) \leqslant k$. Le coefficient du monôme de degré $k+1$ du polynôme de droite de l'égalité ci-dessus est $\gamma_k \binom{2k+2}{k+1}$.

On en déduit que $\boxed{\gamma_k = \dfrac{\binom{2k}{k}}{\binom{2k+2}{k+1}} = \dfrac{k+1}{4k+2}}$

f) On en déduit que $\langle XB_k | B_{k+1} \rangle = \gamma_k \langle B_{k+1} | B_{k+1} \rangle + 0 = \boxed{\dfrac{k+1}{4k+2} ||B_{k+1}||^2}$.

g) On a

$$(n - X).B_k(n - X) = \gamma_k B_{k+1}(n - X) + \beta_k B_k(n - X) + \alpha_k B_{k-1}(n - X)$$

En utilisant le résultat de la question 9) et en divisant par $(-1)^k$ on obtient que

$$(n - X).B_k = -\gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k - \alpha_k B_{k-1}$$

En ajoutant la relation initiale, on a donc $2\beta_k B_k = nB_k$. On en déduit que $\boxed{\beta_k = \frac{n}{2}}$

h) On voit que

$$\langle XB_k | B_{k-1} \rangle = 0 + 0 + \alpha_k ||B_{k-1}||^2$$

De plus

$$\langle XB_k | B_{k-1} \rangle = \langle B_k | XB_{k-1} \rangle = \gamma_{k-1} ||B_k||^2 + \beta_{k-1} \langle B_k | B_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle B_k | B_{k-2} \rangle$$

On en déduit que

$$\alpha_k = \gamma_{k-1} \frac{||B_k||^2}{||B_{k-1}||^2} = \frac{k}{4k-2} \frac{||B_k||^2}{||B_{k-1}||^2}$$

En regroupant les résultats on a donc en multipliant par 2,

$$2XB_k = \frac{k+1}{2k+1} B_{k+1} + nB_k + \frac{k}{2k-1} \frac{||B_k||^2}{||B_{k-1}||^2} B_{k-1}$$

D'où

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \left((2X - n)B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{||B_k||^2}{||B_{k-1}||^2} B_{k-1} \right)$$