Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème

Exercice

Une partition d'un ensemble E est un ensemble P de parties toutes non vides de E, 2 à 2 disjointes et de réunion E.
Par exemple pour $E = \{1, 2\}$ les partitions sont $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$.
On note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Ainsi $T_0 = T_1 = 1$ et $T_2 = 2$.

1. Donner les partitions de $\{1, 2, 3\}$. En déduire T_3.

On admet pour le moment que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.

2. En déduire que pour tout entier n, $T_n \leqslant n!$.
3. On considère la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{T_n}{n!} x^n$. Justifier que son rayon de convergence R n'est pas nul.

On note f la somme de cette série entière définie sur $]-R, R[$ par $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

4. Montrer que la fonction f vérifie : $\forall x \in]-R, R[, f'(x) = e^x f(x)$.
   En déduire que :
   $$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = e^{e^x - 1}$$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$
6. Démontrer la relation admise avant la question 2)

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel strictement positif et $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est une famille de $n+1$ nombres réels.
On désigne par k un entier inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P on pose

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$$

L'objet du problème est de déterminer les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\Delta(P)$ soit minimum et de préciser la valeur $m_k = \min\{\Delta(P) \ , \ P \in \mathbb{R}_k[X]\}$ de ce minimum.

Partie I

1. On considère φ_k l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \mathbb{R}_k[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(0), P(1), \cdots, P(n)) \end{array}$$

   On ne demande pas de justifier que φ_k est linéaire.

   a) Justifiez que l'application φ_k est injective.

   b) Déterminer le rang de φ_k.

   c) En déduire que φ_k est un isomorphisme si et seulement si $k = n$.

2. a) Justifier qu'il existe un unique polynôme $Y \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $Y(i) = y_i$.
   Dans toute la suite du problème le polynôme Y est le polynôme ainsi défini.

   b) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], L_i(j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   c) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base (notée $\mathscr{L}$) de $\mathbb{R}_n[X]$.

   d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ déterminer ses coordonnées dans la base $\mathscr{L}$.

3. Si $k = n$ montrer que $\{\Delta(P) \ , \ P \in \mathbb{R}_k[X]\}$ possède un mimimum m_k et le déterminer.

Partie II

4. Pour P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $\langle P \mid Q \rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

   Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire. On désigne alors par $||.||$ la norme euclidienne associée.

5. a) Montrer que la base $\mathscr{L}$ définie à la question 2) est orthonormée pour ce produit scalaire.

   b) Calculer les produits scalaires $\langle 1 | 1 \rangle$ et $\langle 1 | X \rangle$.

   c) Montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{p=1}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. En déduire $\langle X | X \rangle$.

6. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, Montrer que $\Delta(P) = ||Y - P||^2$.
   On rappelle que Y désigne le polynôme défini à la question 2.a).

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que

$$\Delta(P_k) = m_k = \min\{\Delta(P)\ ,\ P \in \mathbb{R}_k[X]\}$$

Que dire du polynôme $Y - P_k$ et du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$? Faire un croquis.

c) **Dans cette question seulement** on suppose que $k = 0$.
Déterminer en fonction de $y_0, y_1, \cdots, y_n$ les expressions de P_0 et m_0.
Comparer $||Y||^2 - ||P_0||^2$ et m_0.

d) **Dans cette question seulement** on suppose que $k = 1$ et que l'entier n est impair. On pose $n = 2q - 1$ où q est un entier non nul.
On suppose de plus que les valeurs $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont définies par la relation :
$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant q-1 \\ -1 & \text{si } q \leqslant i \leqslant 2q-1 \end{cases}$
Calculer $\langle Y|1\rangle$ et $\langle Y|X\rangle$ puis déterminer le polynôme P_1.

Partie III

Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on note F_k l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$. On a donc

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid \forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X], \langle P|Q\rangle = 0\}$$

Dans cette partie on veut construire puis étudier un famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes vérifiant les trois conditions suivantes

i) le polynôme B_0 est égal à 1 ;

ii) pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n la suite $(B_0, B_1, \ldots, B_k)$ est une base **orthogonale** de $\mathbb{R}_k[X]$.

iii) pour k supérieur ou égal à 0, le coefficient dominant du polynôme B_k esr égal au coefficient du binôme $\binom{2k}{k}$.

7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Donner la dimension de F_k.

8. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note Q_k le projeté orthogonal de X^k sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$

   a) Soit $(B_0,\, B_1,\, \cdots,\, B_n)$ une famille vérifiant la condition ii). Soit $k \in [\![1, n]\!]$, justifier que B_k et $X^k - Q_k$ appartiennent à F_k. En déduire que B_k est colinéaire à $X^k - Q_k$.

   b) En déduire qu'il existe une unique famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes vérifiant les conditions i), ii) et iii).

   c) Calculer Q_1 et Q_2. En déduire B_1 et B_2.
   On rappelle que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{p=1}^{N} p^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

9. Soit k un entier compris entre 1 et n, montrer que le polynôme $B_k(n - X)$ (associé à la fonction polynomiale $x \mapsto B_k(n - x)$) appartient à F_k.
En déduire une relation simple entre les polynômes $B_k(n - X)$ et B_k.

10. a) Exprimer à l'aide de produits scalaires les coordonnées du polynôme P_k, défini à la question 6.b) dans la base $\mathscr{B}$.

    b) En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n :
$$P_k = P_{k-1} + \frac{\langle B_k|Y\rangle}{||B_k||^2} B_k \qquad \text{et} \qquad m_k = m_{k-1} - \frac{\langle B_k|Y\rangle^2}{||B_k||^2}$$

11. a) Justifier que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$ tels que : $X.B_k = \sum\limits_{j=0}^{k+1} \lambda_j \ B_j$.

    Rappeler la valeur de λ_j en fonction du produit scalaire.

    b) Justifier que pour tous $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P.Q$, $Q.R \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\langle PQ|R\rangle = \langle P|QR\rangle$.

    c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, k-2]\!]$. Démontrer que : $\langle XB_k|B_j\rangle = 0$.

    d) En déduire, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, l'existence de réels α_k, β_k et γ_k tels que :

$$X.B_k = \gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k + \alpha_k B_{k-1}$$

    e) Déterminer la valeur de γ_k.

    f) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle XB_k|B_{k+1}\rangle$ en fonction de l'entier k et du réel $||B_{k+1}||^2$.

    g) Déterminer, à l'aide de la question 9), la valeur du réel β_k.

    h) Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $||B_{k-1}||^2$ et $||B_k||^2$.

    Déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}\left(B_1.B_k - \frac{k}{2k-1}\frac{||B_k||^2}{||B_{k-1}||^2}B_{k-1}\right).$$