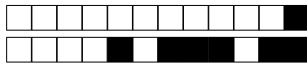




Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

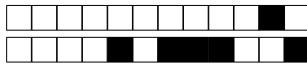
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X - 1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X + 1), (X + 1)^2, (X + 1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X + 1)$ ☐0 ☐1c'est $(X + 1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p - 1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

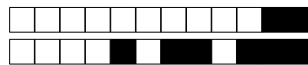
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

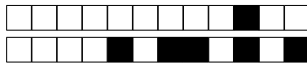
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

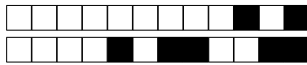
 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

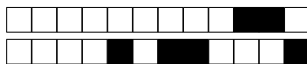
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

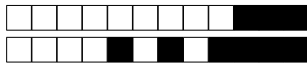
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

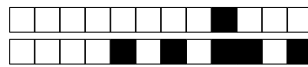
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

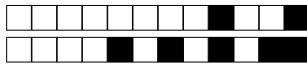
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

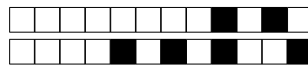
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X - 1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X + 1), (X + 1)^2, (X + 1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X + 1)$ ☐0 ☐1c'est $(X + 1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p - 1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

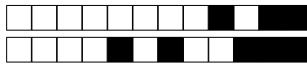
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

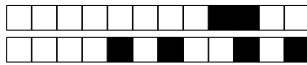
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

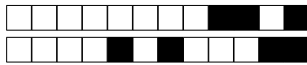
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

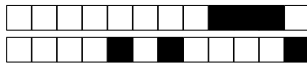
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

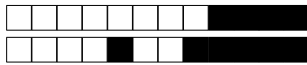
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

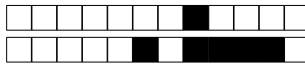
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

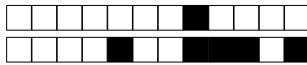
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

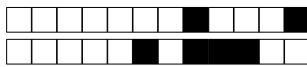
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

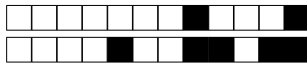
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

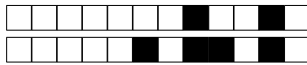
DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

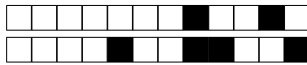
 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

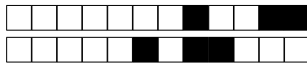
DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

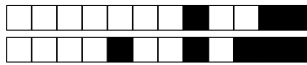
 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

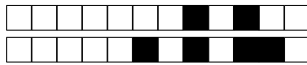
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

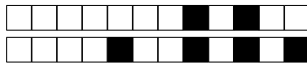
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

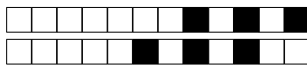
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

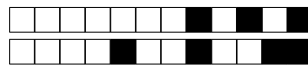
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $|||\cdot|||_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $|||\cdot|||_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

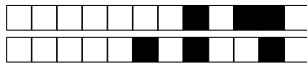
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

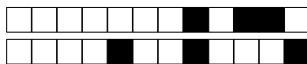
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

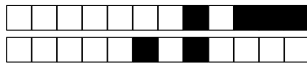
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

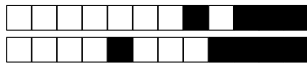
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

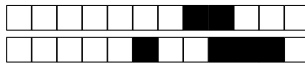
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

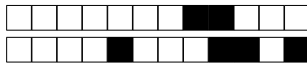
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

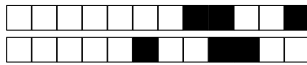
DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

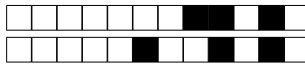
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

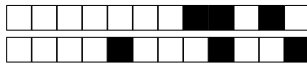
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

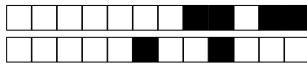
DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

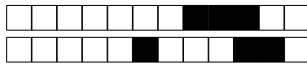
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

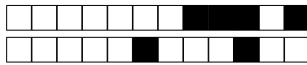
DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\| \cdot \|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X - 1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X + 1), (X + 1)^2, (X + 1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X + 1)$ ☐0 ☐1c'est $(X + 1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p - 1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1
I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1
donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1
II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1
 $\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

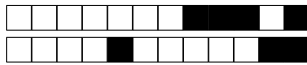
 $x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1
II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1
et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1
..... ☐0 ☐1
BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

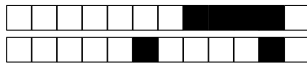
..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

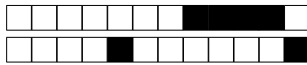
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnee est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et generatrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

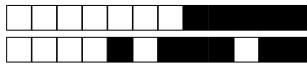
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

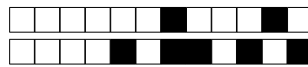
..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs $0, 1, 2, \dots, p$ (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3



Nom :

DS 5

Presentation ☐1 ☐2 ☐3 ☐41) si $x, y \in \ell^2$ alors $\sum x_n y_n$ CV ☐0 ☐1 ℓ^2 sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ☐0 ☐12) $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2 ☐0 ☐1 ☐23)a) ℓ^2 est stable par σ et τ ☐0 ☐13)b) σ est 1-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 1 ☐0 ☐1 τ est 2-lipschitzienne ☐0 ☐1et sa norme subordonnée est 2 ☐0 ☐1 ☐23)c)i) si α s'annule alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ n'est pas une norme ☐0 ☐1si α ne s'annule jamais alors $\|\cdot\|_{\alpha}$ est une norme ☐0 ☐1 ☐23)c)ii) trouver un α qui va bien ☐0 ☐1et montrer que σ n'est pas lipschitzienne ☐0 ☐1I.A) J_x est un idéal ☐0 ☐1non réduit à $\{0\}$ ☐0 ☐1I.B.1) SRL d'ordre 0 est la suite nulle ☐0 ☐1SRL d'ordre 1 sont les suites constantes ☐0 ☐1SRL de polynômes minimal $(X-1)^2$ sont de la forme $(\alpha n + \beta)_n$ ☐0 ☐1avec $\alpha \neq 0$ ☐0 ☐1I.B.2) Le polynôme minimal appartient $\{1, (X+1), (X+1)^2, (X+1)^3\}$ ☐0 ☐1ce n'est pas 1 ou $(X+1)$ ☐0 ☐1c'est $(X+1)^2$ ☐0 ☐1I.C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1stable par σ ☐0 ☐1I.C.2) Pour $A = X^p$ ($p \geq 1$), $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \{\text{suites nulles à partir du rang } p\}$ ☐0 ☐1Base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1I.C.3.a) $E_A(\mathbb{K}) = \{(Q(n)\lambda^n)_n, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$ est un sev ☐0 ☐1de dimension p ☐0 ☐1I.C.3.b) $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ où $A = (X - \lambda)^p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3donc $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ par dimension ☐0 ☐1I.D) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus \text{Ker}((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma))$ par décomposition des noyaux ☐0 ☐1car les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux ☐0 ☐1Donc $n \geq m_0 \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n$ ☐0 ☐1gestion correcte de $\lambda_0 = 0$ ☐0 ☐1 ☐2II.A.1) $(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p}$ est à termes dans $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ ☐0 ☐1est libre ☐0 ☐1et génératrice ☐0 ☐1 $\text{rg}(\sigma_k(x))_{0 \leq k < p} = n$ si $n \leq p$ ☐0 ☐1et p si $n \geq p$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3II.A.2) $\varphi_n : \mathcal{B}_B(\mathbb{K}) \ni v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1})$ est injective ☐0 ☐1 $\forall n \geq p, \text{rg} H_n(x) = p$ par II.A.1) et les lignes de H_n sont les images de $x, \sigma(x), \dots$ par φ_n ☐0 ☐1II.B.1) $\dim(\text{Ker}(H_{p+1}(x))) = 1$ par thm du rang ☐0 ☐1en divisant on peut avoir un vect dir finissant par 1 ☐0 ☐1car on ne divise pas par zéro ☐0 ☐1II.B.2) $B(\sigma)(x)$ est nulle aux rangs 0, 1, 2, ..., p (ou $p-1$) ☐0 ☐1 B étant unitaire irréductible c'est le minimal de x ☐0 ☐1On considère $x_0 = x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ et $x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$ II.C.1) fonction python qui renvoie la liste x_k pour $0 \leq k \leq n$... ☐0 ☐1 ☐2I.C.2) $\text{rg}(H_i(x)) = 1$ pour $i = 1$ et $i = 2$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 3$ ☐0 ☐1 $\text{rg}(H_i(x)) = 3$ pour $i = 4$ ☐0 ☐1



donc l'ordre minimal est 3 ☐0 ☐1

I.C.3) $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect}((0, 2, -2, 1)^\top)$ ☐0 ☐1

donc la relation est $x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}$ ☐0 ☐1

II.C.4) $x_n = \alpha 0^n + \beta(1 + i/2)^n + \dots$ ☐0 ☐1

$\alpha = 1/2, \beta = (1 - i)/4 = \bar{\gamma}$ ☐0 ☐1

$x_n = 0^n/2 + 2^{(n-1)/2} \cos((n-1)\pi/4)$ ☐0 ☐1

II.C.5) $p = \text{rg}(H_4) = 2$ ☐0 ☐1

et le calcul de $\text{Ker}(H_3(x))$ donne pour minimal $2 - 2X + X^2$ ☐0 ☐1

..... ☐0 ☐1

BONUS ☐-5 ☐-4 ☐-3 ☐-2 ☐-1 ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

..... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3