
Mathématiques

MP - 2022/2023

Table des matières

1	Séries numériques	11
1	Généralités	12
1.1	Définitions	12
1.2	Propriétés	13
1.3	Lien suite-série	14
1.4	Divergence grossière	15
2	Séries de référence	16
2.1	Séries géométriques	16
2.2	Séries de Riemann	16
2.3	Série exponentielle	17
2.4	Exemples de calculs de sommes	18
3	Séries à termes positifs	19
3.1	Généralités	20
3.2	Théorème de comparaison par inégalités pour les séries à termes positifs	20
3.3	Rappels sur les relations de comparaison	21
3.4	Théorème de comparaison par équivalents pour les séries à termes positifs	23
3.5	Règle de d'Alembert	24
4	Séries absolument convergentes	25
4.1	Définition	25
4.2	Applications aux séries dont le terme général n'a pas nécessairement un signe constant	26
5	Comparaison séries - intégrales	28
5.1	Généralités	28
5.2	Exemples et applications	29
6	Séries alternées	30
6.1	Généralités	30
6.2	Etude du reste et de la somme	31
7	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	32
7.1	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	32
7.2	Applications classiques	34
2	Algèbre linéaire et éléments propres	36
1	Rappels	37
1.1	Définitions	37
1.2	Familles de vecteurs	37
1.3	Rang d'une application linéaire	40
2	Rappels sur les matrices	41
2.1	Changements de bases	41
2.2	Matrices semblables	42
2.3	Trace	42

3	Formes linéaires et hyperplans	43
3.1	Changement de bases	43
3.2	Bases duales et formes coordonnées	44
3.3	Formes linéaires et hyperplans	45
4	Compléments en algèbre linéaire	46
4.1	Somme	46
4.2	Parties stables	48
4.3	Calcul par blocs	50
4.4	Calculs par blocs et déterminants	51
5	Éléments propres d'un endomorphisme	53
5.1	Définition	54
5.2	Sous-espaces propres	56
6	Éléments propres d'une matrice	58
6.1	Définition	58
6.2	Endomorphismes et matrices diagonalisables	60
3	Intégration	63
1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$	63
1.1	Rappels et définition	64
1.2	Propriétés	68
1.3	Théorème de comparaison pour les fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, b[$	69
1.4	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, b[$	70
1.5	Comparaison et fonctions de référence	72
2	Intégration sur un intervalle quelconque	73
2.1	Intervalle de la forme $]a, b]$	73
2.2	Intégration sur un intervalle ouvert	76
2.3	Propriétés de l'intégrale	77
2.4	Méthodes de calculs	79
2.5	Intégration des relations de comparaisons	82
3	Les théorèmes de Lebesgue	85
3.1	Limite (simple) d'une suite de fonctions et d'une série de fonctions	85
3.2	Interversion de \lim et \int	86
3.3	Théorème de convergence dominée	87
3.4	Théorème de convergence dominée - Cas continu	89
3.5	Intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions	89
4	Polynôme caractéristique et réduction	92
1	Polynôme caractéristique	92
1.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	92
1.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	94
1.3	Multiplicités	95
1.4	Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire	96
1.5	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit	96
2	Matrices et endomorphismes trigonalisables	98
2.1	Définitions	98
2.2	Critère de trigonalisabilité	98
3	Matrices et endomorphismes nilpotents	102
3.1	Définitions	102
3.2	Critère de nilpotence	104
5	Suites et séries de fonctions	105
1	Suites de fonctions	105
1.1	Convergence simple et convergence uniforme	105
1.2	Norme infinie	108
1.3	Quelques méthodes	110

2	Continuité et double limite	112
2.1	Continuité	112
2.2	Théorème de la double limite	113
3	Intégration et dérivation	115
3.1	Intégration	115
3.2	Dérivation	118
4	Séries de fonctions	119
4.1	Convergence	120
4.2	Continuité, intégration et dérivation	122
4.3	Exemple d'étude d'une fonction définie par une série	125
6	Dénombrabilité et familles sommables	128
1	Ensembles dénombrables	128
1.1	Définitions	128
1.2	Propriétés et exemples	130
2	Familles sommables	132
2.1	Familles sommables d'éléments de $[0, +\infty]$	132
2.2	Familles sommables de nombres complexes	137
2.3	Produit de Cauchy	142
7	Probabilités	144
1	Espaces probabilisés	144
1.1	Tribus	144
1.2	Probabilités	145
2	Propriétés élémentaires des probabilités	147
2.1	Continuité	147
2.2	Événements négligeables, presque sûrs	149
3	Indépendance et probabilités conditionnelles	150
3.1	Probabilités conditionnelles	150
3.2	Événements indépendants	153
4	Variables aléatoires discrètes	155
4.1	Généralités	155
4.2	Couples de variables aléatoires et vecteurs aléatoires	157
4.3	Couples et familles de variables aléatoires indépendantes	159
5	Lois usuelles	162
5.1	Loi uniforme	162
5.2	Loi de Bernoulli et loi binomiale	163
5.3	Loi géométrique	163
5.4	La loi de Poisson	164
8	Polynôme minimal et réduction	166
1	Algèbres	167
1.1	Définition	167
1.2	Sous-algèbre et morphismes d'algèbre	167
2	Polynômes d'endomorphismes et de matrices	169
2.1	Polynômes de matrices	169
2.2	Polynômes d'endomorphismes	170
3	Compléments d'algèbre	171
3.1	Idéaux d'un anneau commutatif	171
3.2	Plus grand commun diviseur	174
3.3	Algorithme d'Euclide	177
3.4	Généralisation à n polynômes	178

4	Polynômes annulateurs	179
4.1	Définitions	179
4.2	Polynôme minimal	180
4.3	Polynômes annulateurs et valeurs propres	182
4.4	Théorème de Cayley-Hamilton	183
4.5	Calcul de puissances	183
5	Critère de diagonalisabilité	185
5.1	Décomposition des noyaux	185
5.2	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	187
5.3	Endomorphismes annulés par un polynôme scindé	189
6	Compléments et applications	190
6.1	Influence du corps de base	190
6.2	Calculs de puissances	191
6.3	Commutant	191
6.4	Décomposition de Dunford	192
6.5	Racines carrées	192
6.6	Sous-espaces stables	193
9	Espaces vectoriels normés I	194
1	Normes	194
1.1	Définition	194
1.2	Exemples de normes	195
1.3	Distance associée à une norme	201
1.4	Boules	202
1.5	Parties, suites et fonctions bornées	203
1.6	Normes équivalentes	204
2	Exemple de normes équivalentes	205
2.1	Sur \mathbb{K}^n	205
2.2	Sur les espaces de fonctions	207
3	Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	208
3.1	Convergence	208
3.2	Propriétés	211
3.3	Suites extraites et valeurs d'adhérence	213
4	Applications linéaires lipschitziennes	214
4.1	Définitions	214
10	Séries entières	218
1	Généralités et rayon de convergence	218
1.1	Définition	218
1.2	Rayon de convergence	219
1.3	Utilisation de la règle de D'Alembert	221
1.4	Théorèmes de comparaison	223
1.5	Opérations	224
2	Étude de la somme d'une série entière	225
2.1	Convergence normale et continuité	225
2.2	Primitivation et dérivation	226
3	Fonctions développables en séries entières	229
3.1	Définitions	229
3.2	Développements en série entière des fonctions usuelles	231
4	Utilisation des séries entières dans l'étude des équations différentielles	231
4.1	Rappels du cours de première année	231
4.2	Rappels - Équations linéaires du premier ordre	232
4.3	Rappels - Équations linéaires du deuxième ordre	234
4.4	Utilisation des séries entières	235

11	Espaces préhilbertiens réels 1	238
1	Rappels	238
1.1	Définition	238
1.2	Orthogonalité et projection orthogonale	240
2	Adjoint d'un endomorphisme	243
2.1	Définition	244
2.2	Propriétés	245
3	Matrices orthogonales	246
3.1	Définition	246
3.2	Groupe spécial orthogonal et orientation	248
3.3	Produit mixte	249
4	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	250
4.1	Définition	250
4.2	Propriétés	251
4.3	Isométries directes et indirectes	253
4.4	Isométries vectorielles du plan euclidien	254
4.5	Réduction des isométries vectorielles	256
4.6	Isométries vectorielles de l'espace	258
12	Probabilités 2	261
1	Espérance d'une variable aléatoire discrète	261
1.1	Cas des variables positives	261
1.2	Cas des variables réelles ou complexes	265
1.3	Propriétés de l'espérance	265
2	Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle	268
2.1	Variables aléatoires réelles de carré sommable	268
2.2	Lois usuelles	271
2.3	Covariance	271
3	Inégalités probabilistes et loi des grands nombres	274
3.1	Inégalités	274
3.2	Loi faible des grands nombres	276
4	Fonctions génératrices	277
4.1	Généralités	277
4.2	Exemples	279
13	Espaces vectoriels normés 2	281
1	Topologie d'un espace vectoriel normé	282
1.1	Ouverts	282
1.2	Voisinages	284
1.3	Fermés	284
1.4	Points intérieurs et intérieur	286
1.5	Points adhérents et adhérence	287
1.6	Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés	289
1.7	Frontière	290
1.8	Densité et approximation uniforme	290
1.9	Invariance par changement de normes équivalentes	292
1.10	Topologie induite	292
2	Étude locale d'une application	294
2.1	Limite en un point adhérent	294
2.2	Composition	297
2.3	Opérations sur les limites	297
2.4	Continuité	298
2.5	Caractérisation du caractère continu par les images réciproques	300
2.6	Applications uniformément continues	301
2.7	Applications lipschitziennes	301
2.8	Applications linéaires continues	303

3	Parties compactes d'un espace vectoriel normé	304
3.1	Définition	304
3.2	Applications continues sur une partie compacte	306
4	Espaces vectoriels de dimension finie	308
4.1	Equivalence des normes	308
4.2	Topologie des espaces vectoriels de dimension finie	309
4.3	Applications continues	310
5	Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie	311
5.1	Généralités	311
5.2	Série géométrique de matrices	312
5.3	Série exponentielle de matrices	313
6	Parties connexes par arcs	315
6.1	Motivation	316
6.2	Définition	316
6.3	Image d'une partie connexe par arcs par une application continue	317
14	Espaces préhilbertiens réels 2	319
1	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	319
1.1	Définition	319
1.2	Matrice d'un endomorphisme autoadjoint	320
1.3	Théorème spectral	321
2	Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	323
2.1	Définitions	323
2.2	Caractérisation spectrale	324
15	Fonctions à valeurs vectorielles	326
1	Dérivabilité	326
1.1	Dérivabilité en un point	326
1.2	Opérations	328
1.3	Dérivées successives	331
2	Intégration sur un segment	331
2.1	Définitions	331
2.2	Propriétés de l'intégrale	333
3	Intégrale fonction de sa borne supérieure	334
3.1	Théorème fondamental de l'analyse	334
3.2	Inégalités des accroissements finis	335
4	Formules de Taylor	336
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	336
4.2	Formule de Taylor-Young	336
5	Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles	337
5.1	Généralités	337
5.2	Continuité et théorème de la double limite	339
5.3	Intégration et dérivation	341
16	Équations différentielles linéaires	343
1	Généralités	343
1.1	Définitions	343
1.2	Structure des solutions	345
1.3	Problème de Cauchy	345
1.4	Équation différentielle scalaire d'ordre n	346
2	Théorème de Cauchy linéaire	348
2.1	Théorème de Cauchy linéaire	348
2.2	Applications du théorème de Cauchy linéaire	349
2.3	Exemples d'équations différentielles non normalisées	351

3	Équations différentielles à coefficients constants	352
3.1	Exponentielle des matrices et endomorphismes	352
3.2	Généralités	353
3.3	Exemples de calculs	355
4	Equations différentielles scalaires du second ordre	357
4.1	Wronskien d'un couple de solution	357
4.2	Variation de la constante	358
4.3	Résolutions d'une équation scalaire du second ordre en connaissant une solution	360
17	Intégrales à paramètres	362
1	Théorèmes généraux	362
1.1	Limite et continuité	362
1.2	Dérivabilité	365
2	Exemples	368
18	Calcul différentiel	369
1	Différentielle et dérivées partielles	370
1.1	Dérivées selon un vecteur	370
1.2	Différentielle	371
1.3	Expression dans une base	374
1.4	Matrice jacobienne	375
1.5	Gradient	376
1.6	Applications de classe \mathcal{C}^1	378
2	Opérations sur les applications différentiables et les applications de classe \mathcal{C}^1	379
2.1	Combinaison linéaire et fonctions multilinéaires	379
2.2	Composition et règle de la chaîne	381
3	Dérivée le long d'un arc	385
3.1	Définition	385
3.2	Théorème fondamental de l'analyse	386
3.3	Vecteurs tangents à une partie	387
4	Fonctions de classe \mathcal{C}^k	390
4.1	Définitions	390
4.2	Opérations algébriques sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	392
5	Exemple d'équations aux dérivées partielles	394
5.1	Premier ordre	394
5.2	Second ordre	394
6	Optimisation	396
6.1	Point critique et extremum	396
6.2	Matrice hessienne	397
6.3	Optimisation sous contrainte	401
19	Algèbre générale	402
1	Groupes	402
1.1	Généralités	402
1.2	Sous-groupe	403
1.3	Morphismes de groupes	406
2	Groupes monogènes	408
2.1	Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	408
2.2	Générateurs, groupes monogènes et groupes cycliques	411
3	Ordre d'un élément	413
3.1	Définition	413
3.2	Théorème de Lagrange	414

4	Anneaux	417
4.1	Définitions	417
4.2	Morphisme d'anneaux	419
4.3	Anneaux intègres et corps	420
5	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	421
5.1	Définition	421
5.2	Théorème Chinois	425
5.3	Indicatrice d'Euler	428
6	Factorisation des polynômes de $K[X]$	430
6.1	Polynômes irréductibles	430
6.2	Décomposition en produit de facteurs irréductibles	431