Exercice I

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^{2n+1}$ et on note f sa somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière. On le notera R.

Corrigé

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^{2n+1}$

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. On voit que $|a_n|x^{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^{2n+1}}{2n^2}$.

Si $x > 1$, la suite $(|a_n|x^{2n+1})_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$. Elle n'est pas bornée donc $x \geqslant R$. Ceci étant vrai pour tout $x > 1$, on a $R \leqslant 1$.

Si $x < 1$, la suite $(|a_n|x^{2n+1})_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. Elle est bornée donc $x \leqslant R$. Ceci étant vrai pour tout $x < 1$, on a $R \geqslant 1$.

Finalement $R = 1$

2. Soit $x \in]-R, R[$ déterminer $f'(x)$.

Corrigé

Par dérivation terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1 + x^2)$$

3. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Corrigé

Pour déterminer f, on va intégrer $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sur $]-1, 1[$. Comme $f(0) = 0$, on cherche la primitive qui s'annule en 0. Par intégration par parties, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln(1+t^2)dt &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)
\end{aligned}$$

4. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Corrigé

Pour $x = 1$, on étudie la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^{2n+1}$. Comme $|a_n| = \frac{1}{n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n|$ converge ; cela montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est absolument convergente donc convergente.
On peut appliquer le théorème d'Abel radial,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2) - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Exercice II

On considère $E = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire canonique

$$\forall (M,N) \in E^2, (M|N) = \operatorname{tr}(M^\top N)$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base puis une base orthonormée de $F^\perp$.

Corrigé

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $F = \operatorname{Vect}(I_2, A)$. Soit M matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in F^\perp &\iff M \perp I_2 \text{ et } M \perp A \\ &\iff x + t = 0 \text{ et } y - z = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(U,V)$$

où

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (U,V) est une base de $F^\perp$. De plus $(U|V) = 0$, il suffit donc de normer les vecteurs. On en déduit que $(\tilde{U}, \tilde{V})$ est une base orthonormée de $F^\perp$ où $\tilde{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} U$ et $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} V$.

2. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Corrigé

Si on note $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$. On a alors

$$p_{F^\perp}(J) = (J|\tilde{U})\tilde{U} + (J|\tilde{V})\tilde{V} = \frac{1}{2}(0U + 2V) = V$$

3. Calculer la distance de J à F

Corrigé

D'après le cours, si on note p_F la projection orthogonale sur F,

$$d(J,F) = ||J - p_F(J)|| = ||p_{F^\perp}(J)|| = \sqrt{2}$$

Exercice bonus

Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |A[i,j]| \leqslant n\sqrt{n}$$

Corrigé

Soit M la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1 ou 1. Plus précisément on pose

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } A[i,j] \geqslant 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que

$$(A|M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A[i,j]M[i,j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A[i,j]$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$(A|M) \leqslant ||A||.||M|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A[i,j]^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M[i,j]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$$

2. Montrer que
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A[i,j]\right| \leqslant n$$

Corrigé

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1, on voit que

$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\ (AX)[i] = \sum_{j=1}^{n} A[i,j]X[j] = \sum_{j=1}^{n} A[i,j]$$

et donc
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A[i,j]\right| = \left|X^\top AX\right| = |\langle A|AX\rangle| \leqslant ||X|| \times ||AX||$$

où $\langle .|.\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $||.||$ la norme euclidienne associée. On voit alors que

$$||AX|| = \sqrt{\langle AX|AX\rangle} = \sqrt{(AX)^\top AX} = \sqrt{X^\top A^\top AX} = \sqrt{X^\top X} = ||X|| = \sqrt{n}$$

On obtient bien que
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A[i,j]\right| \leqslant (\sqrt{n})^2 = n$$