Devoir surveillé 5

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème (début d'une épreuve de Centrale).

Exercice

On note $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n y_n$ converge.

   En déduire que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$. On pose $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$. On notera $||.||_2$ la norme euclidienne associée.

3. On note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui associe à toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$. On note $\tau = \sigma - \mathrm{Id}$.

   a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par σ et par τ. On note alors σ_2 et τ_2 les endomorphismes induits par σ et τ sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

   b) Montrer que σ_2 et τ_2 sont des applications lipchitziennes et calculer $||\sigma_2||_{\mathrm{op}}$ et $||\tau_2||_{\mathrm{op}}$.

   c) Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de réels positifs. On pose pour $x \in \ell^2(\mathbb{N})$,

   $$||x||_\alpha = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n^2}$$

      i. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $||.||_\alpha$ soit une norme sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

      ii. Peut-on trouver α telle que σ ne soit pas lipschitzienne pour la norme $||.||_\alpha$? Argumenter.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

2012

4 heures

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

On note σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, et tout $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un *morphisme d'algèbres* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$, on a :

- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$;
- si $A = 1$, alors $A(f) = \mathrm{Id}$;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$.

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre $p \geqslant 0$ s'il existe un polynôme $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire *d'ordre* p, dont A est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **I.1** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit, $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ est la réunion des $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ pour tous les polynômes A non nuls dans $\mathbb{K}[X]$).

I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.
On rappelle qu'il en résulte deux choses :
– d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal ;
– d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.
Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est l'*ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B – Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.
On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.
a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.
b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k}$, où :
– les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \dots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k} = 1$;
– l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de A. Si 0 n'est *pas* racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\, \lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \dots, d\}$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_k < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\, \lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique.
On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne qui lui correspond.

II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre *minimal* $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \ldots, v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.

En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rang}(H_n(x)) = p$.

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rang}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \ldots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \ldots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1 X + b_0$.

II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2\,x_{n+1}$$

II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier *uniquement* la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.