

Dans tout ce document  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé

### Montrer qu'une partie est ouverte

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Voici les méthodes classiques pour montrer que  $X$  est un ouvert.

- A) On revient à la définition. Une partie  $X$  de  $E$  est ouverte si et seulement si pour tout élément  $x$  de  $X$ , il existe un réel  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset X$ .
- B) On montre que  $X$  est une réunion (quelconque) de parties ouvertes ou une intersection finie d'ouverts.
- C) On montre que  $X$  est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- D) On montre que son complémentaire est fermé.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

- On considère  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $X = \{f \in E, f > 0\}$ . Montrons que  $X$  est ouvert en utilisant la méthode A). Pour toute fonction  $f$  de  $X$ , comme elle est continue sur un segment, elle est minorée (ce qui est évident ici) et atteint son minimum. Il existe donc  $x_0 \in [0, 1]$  tel que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ . Comme  $f > 0$ , on sait que  $f(x_0) > 0$ , on peut donc poser  $\delta = \frac{f(x_0)}{2}$ . Il suffit alors de vérifier que  $B(f, \delta) \subset X$ . Soit  $g$  une fonction de cette boule, on a donc  $\|g - f\|_\infty < \delta$ . Pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$ ,

$$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) > f(x_0) - \delta > 0$$

On a bien que  $g$  appartient à  $X$  et donc  $B(f, \delta) \subset X$ . La partie  $X$  est un ouvert de  $E$ .

- Montrons que  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On va utiliser la méthode C)  
On considère  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ . On sait que le déterminant est une application polynomiale en les coordonnées<sup>1</sup>. Maintenant,  $\text{GL}_n(\mathbf{C}) = \det^{-1}(\mathbf{C}^*)$ . Or  $\mathbf{C}^*$  est un ouvert de  $\mathbf{C}$  car son complémentaire  $\{0\}$  est un fermé. Finalement,  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Si  $E$  est un  $\mathbf{R}$  espace vectoriel de dimension finie et si  $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}$  est une forme linéaire, pour tout  $a \in \mathbf{R}$ ,  $X = \{x \in E, \ell(x) > a\}$  est un ouvert. En effet  $X = \ell^{-1}(]a, +\infty[)$  or  $\ell$  est continue car c'est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie et  $]a, +\infty[$  est un ouvert.

---

1. car si  $M = (m_{ij})$ , alors  $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \times \cdots \times m_{n\sigma(n)}$ .

**Montrer qu'une partie est fermée**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Voici les méthodes classiques pour montrer que  $X$  est un fermé.

A) On utilise la caractérisation séquentielle.

Précisément, pour montrer que  $X$  est fermé, il suffit de montrer que toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge (donc qui a une limite  $\ell \in E$ ) a sa limite dans  $X$ .

B) On montre que  $X$  est une intersection (quelconque) de parties fermées ou une union finie de fermés.

C) On montre que  $X$  est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D) On montre que son complémentaire  $\complement_E X$  est ouvert.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

– On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  ce sont les matrices  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que

i) Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $m_{ij} \geq 0$

ii) Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$ .

Montrons que  $\mathcal{S}$  est un fermé en utilisant la méthode A). Soit  $(M_p)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}$  telle que la suite  $(M_p)$  converge vers une matrice  $M$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $M[i, j] = \lim_{p \rightarrow \infty} M_p[i, j]$ .

Comme pour tout  $p \in \mathbf{N}$ ,  $M_p \in \mathcal{S}$  on a  $M_p[i, j]$  qui est une suite positive, sa limite est positive et donc  $M[i, j] \geq 0$ .

De plus, pour tout entier  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$\sum_{j=1}^n M[i, j] = \sum_{j=1}^n \lim_{p \rightarrow \infty} M_p[i, j] = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_p[i, j] = 1$$

Finalement  $M \in \mathcal{S}$  ce qui montre que  $\mathcal{S}$  est fermé.

– Soit  $\{x_1, \dots, x_N\}$  un ensemble fini de points de  $E$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  est fermé comme union finie de singletons qui sont des fermés.

– Soit  $\mathcal{B}(\mathbf{N})$  l'ensemble des suites réelles bornées et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie. Soit  $X = \{u \in \mathcal{B}, u \text{ croissante}\}$ . Montrons que  $X$  est fermé. On considère son complémentaire  $Y$ . C'est l'ensemble des suites telles qu'il existe un entier  $n_0$  vérifiant  $u_{n_0+1} < u_{n_0}$ . Soit  $u$  une telle suite et  $n_0$  un entier correspondant. On pose  $\delta = \frac{|u_{n_0+1} - u_{n_0}|}{3}$ . Vérifions que  $B(u, \delta)$  est inclus dans  $Y$ . Soit  $v \in B(u, \delta)$ . On a donc

$$v_{n_0+1} < u_{n_0+1} + \delta < u_{n_0} - \delta < v_{n_0}$$

On en déduit que  $Y$  est ouvert et donc  $X$  est fermé.

**Montrer qu'une partie est compacte**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Voici les méthodes classiques pour montrer que  $X$  est un compact.

- A) Si  $E$  est de dimension finie, on utilisera **la plupart du temps** le fait que  $X$  est compact si et seulement si  $X$  est fermé et borné.
- B) On revient à la définition. On considère une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  et on construit une sous-suite convergente.
- C) On montre que  $X$  est l'image directe d'un compact  $K$  par une application continue. Assez souvent  $K$  sera alors compact comme produit d'un nombre fini de compact.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

- On reprend l'ensemble  $\mathcal{S}$  des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On sait que  $\mathcal{S}$  est fermé. Pour montrer que  $\mathcal{S}$  est compact, il suffit de montrer qu'il est borné car  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est de dimension finie. Par définition de  $\mathcal{S}$ , tout coefficient d'une matrice  $M$  appartient à  $[0, 1]$  donc  $\mathcal{S} \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$ . On en déduit que  $\mathcal{S}$  est borné et donc compact.
- Soit  $K_1, \dots, K_p$  un nombre fini de compacts. On pose  $X = \bigcup_{i=1}^p K_i$ . Montrons que  $X$  est compact. On considère une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $X$ . Il existe  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  tel que  $Z_i = \{n \in \mathbf{N}, x_n \in K_i\}$  est infini car  $\mathbf{N} = \bigcup_{i=1}^p Z_i$ . On peut donc trouver une extractive  $\varphi$  strictement croissante de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$  telle que  $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  soit à valeurs dans  $K_i$ . Comme  $K_i$  est compact, il existe une extractive  $\psi$  strictement croissante de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$  telle que  $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \geq 0}$  converge. On a bien montré que  $X$  était compact.

**Exercice :** Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est un compact.