Espaces vectoriels normés 2 (Partie 2)

Chapitre 13

4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

4.1 Défintion

Certains théorèmes d'analyse ne sont vrais que sur des segments : théorème de Bolzano-Weierstrass, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Le but de ce chapitre est de généraliser cela a des parties d'un espace vectoriel normé.

Définition 13.20

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que c'est un compact (ou que c'est une partie compacte) si on peut extraire de toute suite de A une sous-suite ***convergente dans*** *A.*

Remarques :

1. Il est important que la limite de la suite soit dans A.
2. Cette définition s'appelle *propriété de Bolzano-Weierstrass*. Il existe une autre définition *propriété de Borel-Lebesgue* qui n'est pas au programme.
3. On peut aussi dire : « toute suite a une valeur d'adhérence ».
4. La définition de compact est *absolue*. Il n'y a pas de notion de compact relatif à X.
5. On peut dire que A est un compact ou que A est compact.

Exemples :

1. Dans $\mathbf{R}$, les segments $[a, b]$ sont des compacts. En effet si (u_n) est une suite à valeurs dans $[a, b]$ elle est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente de (u_n). De plus, comme $\forall n \in \mathbf{N}, a \leqslant u_n \leqslant b$ alors c'est encore vrai pour $(u_{\varphi(n)})$ et donc la limite de la suite extraite est bien dans $[a, b]$.

   Cela montre bien que de tout suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $[a, b]$ on peut extraite une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers une limite $\ell \in [a, b]$.
2. L'ensemble vide est un compact de $\mathbf{R}$.
3. Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ une réunion finie de segment de $\mathbf{R}$. Montrons que K est compact.

4. L'ensemble $\mathbf{R}$ dans sa totalité n'est pas compact.

Exercice : Montrer qu'une intersection de compacts est compacte

Proposition 13.42

La caractère compact ne change pas si on remplace la norme de E par une norme équivalente.

Démonstration : Il suffit de voir que l'on ne modifie pas la convergence des suites. □

Proposition 13.43

Soit A une partie compacte de E. Elle est fermée est bornée.

Démonstration :

ATTENTION

Dans le cas général ce n'est pas une équivalence. Pour $E = \mathbf{K}[X]$ avec la norme infinie. La boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ est bornée et fermée. Mais elle n'est pas compacte.

Proposition 13.44

Soit A une partie compacte de E. Une partie B de A est compacte si et seulement si elle est fermée (dans A).

Démonstration :

Proposition 13.45

Soit A une partie compacte de E et (u_n) une suite de A. Elle est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration :

Proposition 13.46 (Produit fini de compacts)

Soit $(E_1, ||.||_1), \dots (E_p, ||.||_p)$ des espace vectoriels normés. On se donne pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ une partie A_i compacte de E_i. Alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est une partie compacte de $E_1 \times \dots \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration :

4.2 Applications continues sur une partie compacte

On a défini les parties compactes comme celles qui vérifient la propriété de Bolzano-Weierstrass. On voulait aussi généraliser la fait qu'une fonction **continue** sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 13.47

Soit E et F des espaces vectoriels normées. Soit A une partie de E et f une application **continue** de A dans F. Soit B une partie compacte de A alors $f(B)$ est compacte.

Remarque : On dit « l'image d'un compact par une application continue est compact »
Démonstration :

ATTENTION

Ne pas confondre le fait que l'image **directe** d'un compact par une application continue est compact avec le fait que l'image **réciproque** d'un fermé / ouvert par une application continue est fermé / ouvert.

Nous pouvons alors retrouver le théorème vu en première année.

Corollaire 13.48 (Théorème des bornes atteintes)

Soit f une application continue de $A \subset E$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que A est compact et non vide alors $f(A)$ est bornée et les bornes sont atteintes.

Démonstration :
Remarque : Quand on considère une application d'une partie compacte A et une application continue f de A dans un espace vectoriel normé $(F, ||.||_F)$ on peut appliquer ce théorème à

$$||f||_F : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & ||f(x)||_F \end{array}$$

En effet $||f||_F$ est continue en tant que composée de deux applications continues.
Exercice : Soit K une partie compacte. Montrer que pour tout élément x de E, il existe un élément $\alpha \in K$ tel que $d(x, K) = ||x - \alpha||$.

Exemple : Une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (D'Alembert-Gauss) utilise un argument de compacité.

Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant qui ne s'annule pas. On considère alors

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{R} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{|P(z)|} \end{array}$$

On peut aussi reformuler le théorème de Heine

Théorème 13.49 (Théorème de Heine)

Soit A une partie compacte de E. Toute application continue f de A dans F est uniformément continue.

Démonstration :

5 Espaces vectoriels de dimension finie

Nous allons étudier plus particulièrement les notions topologiques étudiées précédemment dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

5.1 Equivalence des normes

Commençons par un lemme

Lemme 13.50

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on note $||.||_\infty$ la norme infinie relative à cette base.
La boule unité fermée $\overline{B}_\infty(0,1)$ est compacte pour la norme $||.||_\infty$.

Démonstration :

Théorème 13.51

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration : (Non exigible)

Note

Dans le cas de l'étude topologique d'un espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme utilisée. En effet en modifiant une norme pas une autre qui lui sera équivalente on ne modifie pas :

- La convergence des suites
- Le caractère ouvert et donc l'intérieur
- Le caractère fermé et donc l'adhérence
- Le caractère compact
- La continuité des fonctions.

5.2 Topologie des espaces vectoriels de dimension finie

Nous allons voir certaines propriétés topologiques qui ne sont vraies que pour les espaces vectoriels de dimension finie. Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel normé **de dimension finie**. On note $||.||$ sa norme.

Proposition 13.52

Une partie A de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration :
Exemples :

1. Les boules fermées et les sphères sont compactes. Ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie.
2. L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Notons $\mathrm{St}_n(\mathbf{R})$ des matrices stochastiques de taille n. On rappelle qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite stochastique si

- $\forall (i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, M[i, j] \geqslant 0$
- $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \sum_{j=1}^{n} M[i, j] = 1$

Montrons que $\mathrm{St}_n(\mathbf{R})$ est compact

Corollaire 13.53

Soit (u_n) une suite de E bornée.

1. Elle admet une sous-suite convergente.
2. Elle converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration : Il suffit d'utiliser que la suite (u_n) est une suite à valeurs dans le compact $\overline{B}(0, R)$ où $\forall n \in \mathbf{N}, ||u_n|| \leqslant R$. $\square$

Proposition 13.54 (Rappel)

Les sous-espaces vectoriels sont fermés (mais pas compacts s'ils ne sont pas réduit à $\{0\}$).

5.3 Applications continues

Théorème 13.55

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors f est continue.

Démonstration : On considère la norme infinie $||.||_\infty$ associée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On note $C = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} ||f(e_i)||_F$ alors pour tout x de E, en posant pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $\lambda_i = e_i^*(x)$,

$$||f(x)||_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||\lambda_i f(e_i)||_F \leqslant nC||x||_\infty.$$

L'application f est donc continue. □

Exemples :

1. Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, l'application $\Phi : M \mapsto P^{-1}MP$ est linéaire donc continue.
   On en déduit que si $(A_n) \to A$ alors si on pose $B_n = P^{-1}A_nP$, la suite (B_n) converge vers $P^{-1}AP$.
2. Les projections e_i^* sont continues car linéaires.

Proposition 13.56

Soit Φ est un application multilinéaire, il existe une constante C telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n), ||\Phi(x_1, \dots, x_n)|| \leqslant C \prod_{i=1}^{n} ||x_i||.$$

En particulier, Φ est continue.

Démonstration : La démonstration est similaire à la précédente. Traitons le cas des applications bilinéaires.

Exemples :

1. L'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par $\Phi : (A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire donc continues
2. Soit E un espace préhilbertien réel, le produit scalaire $(\bullet, \bullet) : E \times E \to \mathbf{R}$ est bilinéaire donc continue.
3. Soit E de dimension n, le déterminant est n-linéaire. donc continue
4. Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ l'application définie par $\varphi : (A, X) \mapsto AX$. Elle est bilinéaire donc continue.

6 Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

6.1 Généralités

Définition 13.21

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(\sum u_n)$ une série d'éléments de E.

1. *On dit que la série converge si la suite des sommes partielles converge.*
2. *On dit que la série converge absolument si la série numérique $(\sum ||u_n||)$ converge.*

Remarque : Toutes les normes étant équivalente, l'absolue convergence ne dépend pas de la norme choisie.

Théorème 13.57

Soit $(\sum u_n)$ une série d'éléments de E absolument convergente. Elle converge.

Démonstration :

ATTENTION

Ce théorème n'est pas vrai (en général) dans un espace vectoriel normé de dimension infinie.
Par exemple pour $E = \mathbf{K}[X]$ avec la norme infinie $||.||_\infty$. On pose pour tout entier n non nul $P_n = \frac{1}{n^2}X^n$. Il est clair que $||P_n||_\infty = \frac{1}{n^2}$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} ||P_n||_\infty$ converge.

6.2 Série géométrique de matrices

On se place dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On veut étudier les séries géométriques. On veut donc pouvoir « estimer » $||A^p||$

Lemme 13.58

Soit $||.||$ une norme sur E, il existe C tel que

$$\forall (A,B) \in E^2, ||AB|| \leqslant C||A||||B||.$$

Démonstration : Il suffit de voir que $(A,B) \mapsto AB$ est une application bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

□

Remarque : On sait que si on considère une norme $||.||$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On peut lui associer la norme d'opérateur $||.||_{\mathrm{op}}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\ ||A||_{\mathrm{op}} = \sup\{||AX||\ ,\ ||X|| \in \overline{B}(0,1)\}$$

On a montré que cette norme vérifiait

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2, ||AB||_{\mathrm{op}} \leqslant ||A||_{\mathrm{op}}||B||_{\mathrm{op}}$$

Dans toute la suite on notera C une constante réelle telle que

$$\forall (A,B) \in E^2, ||AB|| \leqslant C||A||||B||.$$

Proposition 13.59

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, si $||A|| < \dfrac{1}{C}$ alors la série géométrique $(\sum A^p)$ converge absolument. De plus sa somme vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} A^p = (I_n - A)^{-1}$$

Démonstration :

Remarques :

1. On montre ainsi que si A a une norme « petite » alors $I_n - A$ est inversible. Ce n'est qu'une condition suffisante, on peut par exemple trouver des matrices nilpotentes de très grande norme et on a encore $I_n - N$ inversible d'inverse $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} N^p$ qui converge car la suite $(N^p)_{p\geqslant 0}$ stationne à 0.

2. On en déduit qu'il existe une boule ouverte centrée en I_n inclus dans l'ensemble des matrices inversibles :

$$B(I_n, \delta) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}).$$

On peut retrouver que $\mathrm{GL}_N(\mathbf{K})$ est ouvert.

3. On peut aussi considérer la série $(\sum u^p)$ pour $u \in \mathscr{L}(E)$.

6.3 Série exponentielle de matrices

Regardons maintenant la série exponentielle $\left(\sum \frac{A^p}{p!}\right)$.

Proposition 13.60

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la série exponentielle est absolument convergente. On note $\exp(A)$ sa somme.

Démonstration :

□

Remarque : De même pour $u \in \mathscr{L}(E)$ on peut définir $\exp(u)$.

Proposition 13.61

Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$ alors

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Démonstration :

ATTENTION

En particulier, on voit que $I_n = \exp(0) = \exp(A-A) = \exp(A)\exp(-A)$ donc $\exp(A)$ est inversible et $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$.

Nous verrons lors du chapitre sur les équations différentielles l'interêt de l'exponentielle de matrice. Voyons déjà quelques méthodes de calculs.

1. Si A est un matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

   Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

   On en déduit que
   $$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. On pose $B = P^{-1}AP$. On a donc que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $B^p = P^{-1}A^pP$ et donc
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{p=0}^{n} \frac{B^p}{p!} = P^{-1}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!}\right)P.$$

   On sait que le produit matriciel est continu donc
   $$\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P.$$

   Dit autrement, pour calculer l'exponentielle d'une matrice on peut la « remplacer » par une matrice semblable puis faire le changement de bases.

3. Dans le cas où A est annulé par un polynôme scindé (toujours vrai sur $\mathbf{C}$) on sait qu'elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de la forme $\lambda I_p + N$ où N est nilpotente. D'après ce qui précède, on peut donc se ramener à calculer $\exp(\lambda I_p + N)$. De plus λI_p et N commutent on a donc
   $$\exp(\lambda I_p + N) = \exp(\lambda)\exp(N).$$

   Or le calcul de $\exp(N)$ est aisé car N^k est stationnaire à 0.

4. Dans le cas où A est diagonalisable. Plutôt que de faire le changement de bases qui nécessite de calculer P^{-1}, on peut utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

   Précisément, on note $\pi_A = \prod_{i=1}^{d}(X - a_i)$ le polynôme minimal.

Exercices :

1. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut exprimer A en fonction de I et de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$. On pourra utiliser que $\mathbf{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel fermé.

3. Montrer que pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(\exp(M)) = \exp(\operatorname{tr}(M))$.

7 Parties connexes par arcs

On veut maintenant généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

7.1 Motivation

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vérifié dans $\mathbb{C}$ par exemple. Si on considère la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On a $1 \in f(\mathbb{R})$, $-1 \in f(\mathbb{R})$ mais le segment $[-1, 1]$ n'est pas inclus dans $f(\mathbb{R})$.

7.2 Défintion

Définition 13.22

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E.

1. *On appelle chemin dans A (ou arc dans A) une application **continue** $\gamma : [0, 1] \to A$.*
2. *Soit x et y dans A. On appelle chemin dans A de x vers y un chemin γ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Remarque : Il faut imaginer l'arc (ou le chemin) comme l'image $\gamma([0, 1])$ de l'application.

Proposition 13.62

Soit A une partie de E. On construit une relation binaire sur A en posant

$$\forall x \in A^2, x\mathscr{R}y \iff (\text{il existe un chemin dans } A \text{ de } x \text{ vers } y)$$

C'est une relation d'équivalence.

Démonstration :

Remarque : On va alors regarder les classes d'équivalences de pour cette relation.

Définition 13.23

Une partie A est dite connexe par arcs si pour tout x et y dans A il existe un chemin de x vers y.

Remarque : Cela revient à dire qu'il n'y a qu'une classe d'équivalence pour la relation précédente.

Proposition 13.63

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration :

Définition 13.24 (Parties étoilées)

Soit $A \subset E$. Elle est dite étoilée s'il existe $x_0 \in A$ tel que pour tout y de A, l'intervalle $[x_0, y]$ est inclus dans A.

Proposition 13.64

Soit A une partie de E non vide. On a

$$A \text{ convexe} \Rightarrow A \text{ étoilée} \Rightarrow A \text{ connexe par arcs}$$

Démonstration : Evident □

ATTENTION

Quand on n'est plus dans $\mathbf{R}$, les implications ci-dessus ne sont pas des équivalences.

Définition 13.25 (Composantes connexes par arcs)

Soit $A \subset E$, on appelle composantes connexes par arcs les classes d'équivalences de la relation $\mathscr{R}$. En particulier, elles sont connexes par arcs et forment une partition de A.

Exemples :

1. Dans $A = \mathbf{R}^* \subset \mathbf{R}$ la composante connexe de 1 est $]0, +\infty[$
2. Dans $A = \mathbf{C}^* \subset \mathbf{C}$ la composante connexe de 1 est $\mathbf{C}^*$ en entier.
3. L'ensemble $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ a une infinité de composantes connexes.

7.3 Image d'une partie connexe par arcs par une application continue

Nous allons pouvoir généraliser le théorème des valeurs intermédiaire.

Théorème 13.65

Soit A une partie connexe par arcs et f une application continue de A dans F. Son image $f(A)$ est connexe par arcs.

Démonstration : Soit y_1, y_2 deux éléments de $f(A)$. Il existe x_1 et x_2 tels que $f(x_i) = y_i$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin γ qui va de x_1 vers x_2. La composée $f \circ \gamma$ est alors un chemin de y_1 vers y_2. $\square$

Exercice : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs et que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.