Fonctions à valeurs vectorielles

Chapitre 15

1 **Dérivabilité** **1**
1.1 Dérivabilité en un point 1
1.2 Opérations 4
1.3 Dérivées successives 7
2 **Intégration sur un segment** **9**
2.1 Définitions 9
2.2 Propriétés de l'intégrale 10
3 **Intégrale fonction de sa borne supérieure** **11**
3.1 Théorème fondamental de l'analyse 11
3.2 Inégalités des accroissements finis 11
4 **Formules de Taylor** **13**
4.1 Formule de Taylor avec reste intégral 13
4.2 Formule de Taylor-Young 14
5 **Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles** **15**
5.1 Généralités 15
5.2 Continuité et théorème de la double limite 18
5.3 Intégration et dérivation 19

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle (non trivial) de $\mathbf{R}$ et F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie (notée p). On note $\|.\|$ la norme.

Nous allons définir la dérivabilité et l'intégration pour les fonctions de I dans F.

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 13.1

Soit f une fonction de I dans F et $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si la fonction

$$\varphi_{t_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{t_0\} & \to & F \\ t & \mapsto & \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \end{array}$$

a un limite en t_0.
Dans ce cas, la fonction f est dite dérivable en t_0, la limite s'appelle dérivée de f en t_0 et on note

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$

Remarques :

1. L'élément $f'(t_0)$ est un élément de F.
2. Dans le cas où $F = \mathbf{R}^2$ ou $F = \mathbf{R}^3$, une application $f : t \longrightarrow F$ peut être imaginée comme le déplacement d'un point dans F en fonction du paramètre t (en voyant F comme un espace affine et plus un espace vectoriel). Dans ce cas, $f'(t_0)$ s'appelle le vecteur vitesse.

Proposition 13.1 (Expression en coordonnées)

Avec les mêmes notations. O note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et on pose pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$,

$$f_i = e_i^* \circ f : I \longrightarrow \mathbf{K}$$

c'est-à-dire que pour tout t dans I, $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i$.

1. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0.
2. Dans ce cas, $f'(t_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i'(t_0)e_i$

Démonstration : Ce n'est qu'un cas particulier du théorème analogue sur les limites. □

Exemple : On considère l'espace vectoriel $F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $\mathscr{B}$ la base canonique. Pour savoir si une application est dérivable, on peut regarder coordonnée par coordonnée. Par exemple si on étudie

$$f : t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Nous allons donner une définition « à la Taylor-Young » de la dérivabilité, il faut au préalable donner un sens à $o(h)$.

Définition 13.2

On note, pour tout entier k, $\underset{h\to 0}{o}\left(h^k\right)$ une fonction définie sur un voisinage de 0 (dans $\mathbf{R}$) et à valeurs dans F de la forme $h \mapsto h^k\varepsilon(h)$ où ε tend vers 0_F quand h tend vers 0.

Remarque : On peut de même définir $\underset{t\to t_0}{o}\left((t-t_0)^k\right)$.

Proposition 13.2 (Interprétation à la Taylor-Young)

Avec les notations précédentes, la fonction la fonction f est dérivable en t_0 si et seulement s'il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0+h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Démonstration : La démonstration est analogue au cas réel.

$$\begin{aligned}
\exists \alpha \in F, f(t_0+h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in F, \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \alpha + \underset{0}{o}(1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \alpha
\end{aligned}$$

□

Exemple : En reprenant notre exemple ci-dessus,

$$\begin{aligned}
f(t_0+h) &= \begin{pmatrix} \cos(t_0+h) & -\sin(t_0+h) \\ \sin(t_0+h) & \cos(t_0+h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t_0 - h\sin t_0 + o(h) & -\sin t_0 - h\cos t_0 + o(h) \\ \sin t_0 + h\cos t_0 + o(h) & \cos t_0 - h\sin t_0 + o(h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 \end{pmatrix} + o(h)
\end{aligned}$$

Définition 13.3 (Dérivabilité à droite et à gauche)

Avec les mêmes notations

1. *Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I, la fonction f est dite dérivable à gauche en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \to t_0^-$. La dérivée à gauche est notée $f'_g(t_0)$.*
2. *Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I, la fonction f est dite dérivable à droite en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \to t_0^+$. La dérivée à droite est notée $f'_d(t_0)$.*

Définition 13.4

Soit f une fonction de I dans F.

1. *Elle est dite dérivable si elle est dérivable en tout point t_0 de I. On note alors f' sa fonction dérivée définie sur I par :*
$$f' : t \mapsto f'(t)$$
2. *Elle est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable et que sa fonction dérivée est continue.*

1.2 Opérations

Proposition 13.3

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable. L'ensemble des fonctions dérivables est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans F.
De même pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration : Il suffit de recopier la preuve usuelle.

Proposition 13.4 (Composée à gauche par une application linéaire)

Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f une fonction de I dans F et $L : F \longrightarrow G$ une application linéaire.

1. Si f est dérivable en t_0 alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et
$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$$
2. Si f est dérivable alors $L \circ f$ est dérivable et
$$(L \circ f)' = L \circ f'$$

Démonstration :

1. On étudie
$$\frac{L(f(t_0+h)) - L(f(t_0))}{h} = L\left(\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} L(f'(t_0))$$
car L est continue (application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie). On en déduit bien que $L \circ f)$ est dérivable en t_0 et que $(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$.
2. Il suffit d'appliquer 1. en tout t_0 de I.

□

Remarque : Ce résultat sera généralisée dans le chapitre sur le calcul différentiel (chain rule)
Exemple : On reprend notre application $f : I \longrightarrow F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :
$$f : t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on peut regarder

$$L : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

Elle est linéaire ; on en déduit que

$$L \circ f : t \mapsto Af(t)$$

est dérivable et de dérivée : $t \mapsto Af'(t)$.

Proposition 13.5

Soit G, H des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit f et g des fonctions de I dans F et de I dans G. Soit $B : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire.

1. Si f et g sont dérivables en t_0 alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et

$$(B(f,g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))$$

2. Si f et g sont dérivables alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et

$$(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$$

Démonstration : La preuve est semblable à la preuve de la dérivabilité d'un produit. Précisément, pour tout h proche de 0

$$B(f(t_0+h), (g(t_0+h)) = B(f(t_0) + hf'(t_0) + h\varepsilon_1(h), g(t_0) + hg'(t_0) + h\varepsilon_2(h))$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers 0 quand $h \longrightarrow 0$. On a donc, par bilinéarité :

$$B(f(t_0+h), g(t_0+h)) = B(f(t_0), g(t_0)) + h\left[B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0))\right] + h\alpha(h)$$

où

$$\alpha(h) = B(f(t_0), \varepsilon_2(h)) + hB(f'(t_0), g'(t_0)) + hB(f'(t_0), \varepsilon_2(h)) + hB(\varepsilon_1(h), g'(t_0)) + hB(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h)) + B(\varepsilon_1(h), g(t_0)))$$

Comme B est bilinéaire et que F, G sont de dimension finie, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad \|B(x,y)\|_H \leqslant C\|x\|_F.\|y\|_G.$$

Montrons que les 6 termes de α tendent vers 0 quand h tend vers 0.

— $\|B(f(t_0), \varepsilon_2(h))\|_H \leqslant C\|f(t_0)\|_F.\|\varepsilon_2(h)\|_G \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

— $\|hB(f'(t_0), g'(t_0))\|_H \leqslant |h|.\|B(f'(t_0), g'(t_0))\|_H \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

— les autres termes se traitent de manière similaire.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, c'est-à-dire que

$$B(f(t_0+h), (g(t_0+h)) = B(f(t_0), g(t_0)) + h\left[B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0))\right] + o\left(h\right)$$

ce qui signifie que $B(f,g)$ est dérivable en t_0 et que

$$(B(f,g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

□

On peut étendre cela aux applications multilinéaires.

Proposition 13.6

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit $\varphi : \prod_{i=1}^{n} F_i \longrightarrow F$ une application n-linéaire. On considère $f_1, \dots, f_n$ des applications dérivables de I dans F_i et on pose

$$\Phi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \varphi(f_1(t), \dots f_n(t)) \end{array}$$

L'application Φ est dérivable et pour tout $t \in I$,

$$\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(f_1(t), \dots, f_{k-1}(t), f_k'(t), f_{k+1}(t), \dots, f_n(t))$$

Démonstration : La démonstration est identique à celle du cas bilinéaire en plus technique. □

Exemples :

1. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $\varphi : t \mapsto A(t)B(t)$ est dérivable et

2. Dans le cas où F est un espace euclidien, on peut regarder le produit scalaire $(u, v) \mapsto (u|v)$ qui est bilinéaire. On en déduit que si f et g sont deux fonctions dérivables de I dans F. La fonction $\varphi : t \mapsto (f(t)|g(t))$ est dérivable et

3. Si on considère une fonction $M : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dérivable. Pour tout $i \in [\![1 \,; n]\!]$, on note $C_i(t)$ la i-ème colonne de la matrice $M(t)$. La fonction $\Phi : t \mapsto \det(M) = \det(C_1(t), \dots, C_n(t))$ est dérivable et

Exercice : Pour tout n on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $D_n(x)$. On pourra commencer par calculer sa dérivée.

Proposition 13.7 (Composée à droite)

Soit f une fonction de I dans F. Soit φ une fonction de J dans I où J est un intervalle de $\mathbf{R}$.

1. Soit $x_0 \in J$, on pose $t_0 = \varphi(x_0)$. Si φ est dérivable en x_0 et f est dérivable en t_0 alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et
$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0)f'(\varphi(x_0))$$
2. Si f et φ sont dérivables alors $f \circ \varphi$ aussi et
$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

Démonstration : Là encore, on recopie la preuve usuelle. Pour h proche de 0

$$\begin{aligned} f(\varphi(x_0+h)) &= f(\varphi(x_0) + h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) \\ &= f(\varphi(x_0)) + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h))f'(\varphi(x_0)) + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) \\ &= f(\varphi(x_0))h\varphi'(x_0)f'(\varphi(x_0)) + h\alpha(h) \end{aligned}$$

où $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

1.3 Dérivées successives

Définition 13.5

Soit f une fonction de I dans F. On définit le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ par récurrence :

- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si f est continue.*
- *Pour tout $n \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivable et que f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.*

On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si pour tout entier n elle est de classe $\mathscr{C}^n$.
On note $\mathscr{C}^n(I,F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I,F)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans F.

Notation : Soit f de classe $\mathscr{C}^n$, on pose

$$f^{(0)} = f; f^{(1)} = f' \text{ et } \forall k \in [\![1 ; n]\!], f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

Remarque : Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F. On pose pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si toutes les fonctions f_i sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Proposition 13.8

On reprend les notations précédentes.

1. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,F)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I,F)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
   En particulier, $\mathscr{C}^n(I,F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ sont des espaces vectoriels.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(I,F)$ et $L \in \mathscr{L}(F,G)$, $L \circ f \in \mathscr{C}^n(I,G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$
3. Soit B une application bilinéaire de F dans F, $(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,F)$ alors $B(f,g) \in \mathscr{C}^n(I,G)$ et
   $$(B(f,g))^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B(f^{(p)}, g^{(n-p)}) \quad \text{(Formule de Leibniz)}$$
4. Si $f \in \mathscr{C}^n(I,F)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^n(J,I)$ alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I,F)$ et
   $$(f \circ \varphi)^{(n)} = \text{(formule de Faà di Bruno)}$$

2 Intégration sur un segment

On s'intéresse maintenant à l'intégration. On se contente de l'intégration des fonctions continues par morceaux sur **un segment**. On notera donc $I = [a, b]$

2.1 Définitions

Définition 13.6 (Fonctions continues par morceaux)

Une fonction f de I dans F est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ telle que

i) Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $f_{|]t_{i-1}, t_i[}$ est continue

ii) La fonction f a une limite (finie) à gauche en tout les t_i (pour $i \in [\![0 ; n-1]\!]$) et à droite en tout les t_i (pour $i \in [\![1 ; n]\!]$).

On noter $\mathscr{CM}(I, F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux.

Remarque : Soit f une fonction de I dans F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. La fonction f est continue par morceaux si et seulement si les fonctions $e_i^* \circ f$ sont continues par morceaux sur I.

Proposition-Définition 13.7

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F,

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b e_i^* \circ f \right) e_i$$

ne dépend pas du choix de la base. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\int_a^b f$ ce terme.

Remarque : Cela correspond à ce qui a été fait pour définir l'intégrale d'une fonction complexe en posant

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b \Re(f) \right) + i \left(\int_a^b \Im(f) \right)$$

Démonstration :

Notation : On notera

$$\int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)dt$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 13.9 (Propriétés)

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{CM}(I,F)$ dans F.
2. Relation de Chasles : Soit $c \in [a,b]$ et $f \in \mathscr{CM}(I,F)$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. Soit $f \in \mathscr{CM}(I,F)$, $\|f\| \in \mathscr{CM}(I,\mathbf{R})$ et
$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\| \quad \text{(Inégalité triangulaire)}$$
4. Soit $f \in \mathscr{CM}(I,F)$, $\|f\| \in \mathscr{CM}(I,\mathbf{R})$ et
$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\| \quad \text{(Formule de la moyenne)}$$

Démonstration :

Définition 13.8 (Sommes de Riemann)

Soit $f : I \longrightarrow F$ et $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ une subdivision de I. On se donne un élément $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \prod_{i=1}^{n}[t_{i-1},t_i]$. On appelle somme de Riemann associée à f, σ et α et on note $R(f,\sigma,\alpha)$,

$$R(f,\sigma,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})f(\alpha_i) \in F.$$

Remarque : Dans le cadre du programme, on ne considère que des subdivision à pas réguliers avec α_i pris « à gauche ». C'est-à-dire, σ_n définie par $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, et pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\alpha_i = t_{i-1}$.

On pose donc

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème 13.10

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,F)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \int_a^b f$.

Démonstration :

On peut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire.

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 13.11 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle (non nécessairement un segment) et f une fonction de I dans F et $a \in I$.
Si f est continue, la fonction $H : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur I est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $H' = f$, de ce fait, H est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires. □

Remarque : Avec les mêmes hypothèses, $x \mapsto \int_x^a f(t)dt$ est une primitive de $-f$.

Corollaire 13.12

Soit f une fonction continue sur I et H une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f = [H]_a^b$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser que H étant une primitive de f, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I, H(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

On en déduit que

$$H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$$

□

3.2 Inégalités des accroissements finis

ATTENTION

Le lemme de Rolle ou le théorème des accroissements finis ne sont plus vraie quand $F \neq \mathbf{R}$. En effet on peut « tourner » autour d'un éventuel zéro. Par exemple

$$f : t \mapsto e^{it} - 1$$

s'annule en 0 et en 2π, pourtant, $\forall t \in [0, 2\pi], f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Proposition 13.13 (Inégalités des accroissements finis)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans F. Soit $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

$$\forall (a,b) \in I^2, \|f(b) - f(a)\| \leqslant |b-a| \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|$$

Remarque : La borne supérieure existe (c'est même un maximum) car la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$

Démonstration : Avec les notations de l'énoncé,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité de la moyenne

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|dt \leqslant |b-a| \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|.$$

□

4 Formules de Taylor

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 13.14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires.

Remarques :

1. Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse : $f(b) = f(a) + \int_a^b f(t)dt$.
2. En posant $b = a + h \iff h = b - a$ on obtient

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)h^k}{k!} + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_a^b \frac{(h-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+u)dt$$

en posant $t = a + u$ dans l'intégrale.

Proposition 13.15 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right\| = \|R_n\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}\|.$$

Remarque : La fonction $f^{(n+1)}$ est continue. Elle est donc bien bornée sur le segment $[a, b]$.

Démonstration : On utilise l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}\|.$$

□

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 13.16 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans F. Pour tout $a \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

en posant $h = x - a$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Démonstration : On revient encore au cas scalaire. En effet soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, on pose $f_i = e_i^* \circ f$ de fait que

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

On peut appliquer la formule de Taylor-Young à chaque f_i qui est de classe $\mathscr{C}^n$.

$$\forall x \in I, f_i(x) = f_i(a) + (x-a)f_i'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f_i^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon_i(x)$$

où $\varepsilon_i(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i.$$

Maintenant, en posant $\varepsilon : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i$ qui tend vers 0 quand x tend vers a, on a bien,

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

□

ATTENTION

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont des formules globales. Elles donnent des informations sur les valeurs de f dans tout l'intervalle. La formule de Taylor-Young en a est par contre locale. On n'en tire que des informations au voisinage du point a.

5 Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles

Précédemment, on a étudié les suites et séries de fonctions définies sur une partie X d'un espace vectoriel de dimension finie (souvent $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et à valeurs dans un corps $\mathbf{K}$. Nous allons étendre les résultats de ce chapitre au cas des fonctions à valeurs dans F.

5.1 Généralités

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définie sur un ensemble X.

Définition 13.9 (Convergence des suites de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans F. Soit $f : X \to F$.

1. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CS} f$ si et seulement si, pour tout x de X la suite $(f_n(x)) \in F^{\mathbf{N}}$ tend vers $f(x)$.*
2. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CU} f$ si et seulement si,*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$
Cela revient à dire que :
   - *à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées ;*
   - $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty,X} = 0$.

Remarque : Ces deux notions ne dépendent pas de la norme sur F car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

ATTENTION

Dans l'énoncé ci-dessus, il ne faut pas confondre la norme $\|.\|$ qui est une norme sur l'espace vectoriel F et la norme infinie $\|.\|_{\infty,X}$ définie sur l'ensemble des fonctions bornées de X dans F par

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

Définition 13.10 (Convergence des séries de fonctions)

Soit (f_k) une suite de fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans F. On considère la série de fonctions $\left(\sum_{k\geqslant 0} f_k\right)$

1. *On dit que la série de fonctions $\left(\sum_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge simplement vers F si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge simplement vers F.*
2. *On dit que la série de fonctions $\left(\sum_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge uniformément vers F si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément vers F.*
3. *On dit que la série de fonctions $\left(\sum_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge normalement si les fonctions f_k sont bornées et que la série numérique à termes positifs $\left(\sum_{k\geqslant 0} \|f_k\|_{\infty,X}\right)$ converge.*

Proposition 13.17

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et que la suite des restes converge uniformément vers 0.

Démonstration : Comme dans le cas usuel. □

Théorème 13.18

Soit $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ une série de fonctions. Si elle converge normalement alors elle converge uniformément.

Démonstration :

Exemple : Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et on pose C tel que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2, \|AB\| \leqslant C\|A\|\|B\|.$$

On pose $f_n : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par $f_n : A \mapsto \dfrac{A^n}{n!}$. On considère alors la série de fonctions $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(A)\right)$.

5.2 Continuité et théorème de la double limite

On suppose maintenant que X est une partie d'un espace vectoriel normé E. On note $\|.\|_E$ la norme de E. Les théorèmes sur la continuité des suites et des séries de fonctions se généralisent directement.

Théorème 13.19 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction f.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   ii) Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément .

   Alors la fonction f est continue en x_0.
2. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues sur X
   ii) Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément .

   Alors f est continue sur X.

Théorème 13.20 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

Soit $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction S.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   ii) Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors la fonction S est continue en x_0.
2. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues sur X
   ii) Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors S est continue sur X.

Exemple : On reprend la série exponentielle de matrice. Pour tout k, $f_k : A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. De plus, pour tout $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. La boule ouverte $B(0_E, \|A_0\|+1)$ est un voisinage de A_0 qui est borné. De ce fait, la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur cette boule. On en déduit que $A \mapsto \exp(A)$ est une fonction continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice : Montrer $A \mapsto (I-A)^{-1}$ est continue sur un voisinage ouvert de 0.

On peut aussi généraliser le théorème de la double limite.

Théorème 13.21 (Théorème de la double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F et $f \in \mathscr{F}(X,F)$. Soit a un point adhérent à X. On suppose que

i) La suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur un voisinage de a dans X.

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \ell = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

Théorème 13.22 (Double limite pour les séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur X et a un point adhérent à A. On suppose que

i) La série de fonctions converge uniformément vers S au voisinage de a

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge (vers ℓ) et $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \ell$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

5.3 Intégration et dérivation

Nous allons maintenant généraliser l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions dans le cas des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 13.23

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Les fonctions f_n sont continues.

ii) La suite de fonction converge uniformément sur tout segment J inclus dans I.

Soit $a \in I$, on pose $H_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. La suite (H_n) converge uniformément vers H sur tout segment J de I.

Démonstration : Il suffit de le démontrer coordonnées par coordonnées sur une base de F. □

Il existe une « version série ».

Théorème 13.24 (Intégration des séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est continue

ii) La série de fonction converge uniformément sur tout segment J vers S

Pour tout a de I on pose $H_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a. Alors la série $\sum H_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers $x \mapsto \int_a^x S$. C'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Remarque : En particulier si $I = [a, b]$ on obtient $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$ dans le premier cas et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ dans le deuxième cas.

Les théorèmes sur la dérivation se généralisent aussi au cas des fonctions vectorielles.

Théorème 13.25

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

ii) La suite de fonctions (f_n) converge (simplement) vers une fonction f.

iii) La suite des fonctions dérivées (f_n') converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g.

Alors la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur tout segment J de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$. Dit autrement on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)'.$$

Là encore, il existe un « version série ».

Théorème 13.26 (Dérivation termes à termes)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

ii) la série de fonctions converge (simplement) vers S sur I,

iii) la série de fonctions des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment J vers T

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et $S' = T$. C'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Remarque : On peut encore étendre ces théorèmes au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple : Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on pose pour tout entier k, $f_k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$f_k : t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!}$$

À $t \in \mathbf{R}$ fixé, on sait que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{(tA)^k}{k!}$ converge. La série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 0} f_k$ converge simplement vers

$$S : t \mapsto \exp(tA)$$