Partie I - La convergence presque sûre

1. a) Soit $\varepsilon > 0$.

   Pour n et $p \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - S_p|$ est une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ car $Y_1, \ldots, Y_{\max(n,p)}$ sont des variables aléatoires discrètes. Ainsi $[\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \in \mathscr{A}$

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $[\![N, +\infty[\![\times [\![N, +\infty[\![$ est dénombrable comme produit d'un nombre fini non nul d'ensembles dénombrables ($[\![N, +\infty[\![$ est dénombrable comme partie infinie de $\mathbb{N}$, qui est dénombrable).

   Toute intersection d'une famille dénombrable d'événements est un événement, donc

   $$\bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \in \mathscr{A}$$

   Toute réunion d'une famille dénombrable d'événements est un événement, donc

   $$\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \in \mathscr{A}$$

   ce qui justifie, pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\text{l'appartenance de } B(\varepsilon) \text{ à } \mathscr{A}}$

   b) Soit $\omega \in \Omega$.

   $$\begin{aligned}
   \text{On a } \omega \in \mathscr{C} &\iff \text{la suite } (S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge} \\
   &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Rightarrow |S_p(\omega) - S_n(\omega)| \leqslant \varepsilon) \\
   &\quad \text{d'après la propriété admise} \\
   &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Rightarrow \omega \in [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,]) \\
   &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \\
   &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \omega \in \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \\
   &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \omega \in B(\varepsilon) \\
   &\iff \omega \in \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)
   \end{aligned}$$

   On a établi l'égalité : $\boxed{\mathscr{C} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)}$

   c) On suppose $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. On a donc $[\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \subset [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon'\,]$

   donc $\displaystyle\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,] \subset \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n \geqslant N \\ p \geqslant N}} [\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,]$ donc $\boxed{B(\varepsilon) \subset B(\varepsilon') \text{ quand } 0 < \varepsilon < \varepsilon'}$

   d) Soit $\omega \in \mathscr{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en posant $\varepsilon = \frac{1}{k}$, on obtient que $\omega \in B(\varepsilon) = B(\frac{1}{k})$. Cela montre que $\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$ et donc que $\mathscr{C} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$.

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$. On déduit que $\omega \in B(\varepsilon)$ car $\omega \in B(\frac{1}{k})$ et que $B(\frac{1}{k}) \subset B(\varepsilon)$. On montre donc que $\omega \in \bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)\mathscr{C}$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k}) \subset \mathscr{C}$.

En regroupant les deux inclusions, on obtient que $\mathscr{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$.

2. a) Commençons par remarquer que la suite $(B(\frac{1}{k}))_{k\geqslant 1}$ est décroissante d'après la question 1.c. Le théorème de continuité décroissante affirme alors que

$$P(\mathscr{C}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Procédons alors par double implication.

— $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que pour tout entier naturel k non nul, $P\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$.

Par passage à la limite, $P(\mathscr{C}) = 1$

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $P(\mathscr{C}) = 1$. On sait que la suite $\left(P\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et de limite 1 donc pour tout $k \geqslant 1$, $P\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) \geqslant 1$. Comme de plus, ce sont des probabilités, on obtient que $P\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$.

b) En remarquant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(1/k) \subset B(\varepsilon)$, à l'aide de ce qui précède :

$$P(\mathscr{C}) = 1 \iff \forall \varepsilon > 0,\ P(B(\varepsilon)) = 1 \iff \forall \varepsilon > 0,\ P\left(\overline{B(\varepsilon)}\right) = 0$$

Or par opération ensembliste $\overline{B(\varepsilon)} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]$

Ainsi $\boxed{P(\mathscr{C}) = 1 \text{ si, et seulement si, pour tout } \varepsilon > 0,\ P\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) = 0}$

c) Soit $\varepsilon > 0$.

La suite d'événements $\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Donc par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right)$$

Avec (b), $P(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) = 0$

Partie II - Une inégalité

3. a) On a $\mathbb{1}_A(\Omega) \subset \{0,1\}$ d'où l'existence de l'espérance car $\mathbb{1}_A$ est une variable élatoire bornée donc $E(\mathbb{1}_A) = 1 \cdot P([\mathbb{1}_A = 1]) + 0 \cdot P([\mathbb{1}_A = 0])$

On a établi l'égalité : $\boxed{E(\mathbb{1}_A) = P(A)}$

b) Soit l'entier naturel N non nul et l'entier $p > N$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(Y_n) = 0$ car Y_n est centrée. Comme de plus, $S_p - S_N = \sum\limits_{k=N+1}^{p} Y_n$, par linéarité, $E(S_p - S_N) = \sum\limits_{k=N+1}^{p} E(Y_k) = 0$.

On a donc $\boxed{E(S_p - S_N) = 0}$

On déduit que ce qui précède que $E((S_p - S_n)^2) = V(S_p - S_n) + (E(S_p - S_N))^2 = V(S_p - S_n)$.
Par indépendance des Y_k (donc indépendance deux à deux) on a donc

$$E((S_p - S_n)^2) = V(S_p - S_N) = \sum_{k=N+1}^{p} V(Y_k) = \sum_{k=N+1}^{p} E(Y_k^2)$$

4. On a :

$$[T_N = k] = [|S_k - S_N| > \varepsilon] \bigcap \left(\bigcap_{p=N+1}^{k-1} [|S_p - S_N| \leqslant \varepsilon] \right)$$

Ainsi $[T_N = k] \in \mathscr{A}$ comme intersection d'une famille finie (donc au plus dénombrable) d'événements.
De même,

$$[T_N = +\infty] = \overline{\left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} [T_N = k] \right)} \in \mathscr{A}$$

Pour finir, $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ qui est dénombrable. On a bien montré que T_N était une variable aléatoire discrète.

5. a) Soit $k > N$. Soit $\omega \in \Omega$.
Si $T_N(\omega) = k$, alors $\left(\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)\right)(\omega) = (S_k - S_N)^2(\omega) > \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}(\omega)$
Si $T_N(\omega) \neq k$, alors $\left(\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)\right)(\omega) = 0 = \varepsilon^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}(\omega)$
Ainsi $\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}$ donc $E\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant E\left(\varepsilon^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) = \varepsilon^2 E\left(\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)$
ce qui prouve avec 3(a), que $\boxed{\varepsilon^2 P\left([T_N = k]\right) \leqslant E\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)}$
On pouvait aussi appliquer directement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev plutôt que de la redémontrer, en remarquant que $[T_N = k] = [|\mathbb{1}_{[T_N=k]}(S_k - S_N)| > \varepsilon] \subset [|\mathbb{1}_{[T_N=k]}(S_k - S_N)| \geqslant \varepsilon]$ et que $(\mathbb{1}_{[T_N=k]})^2 = \mathbb{1}_{[T_N=k]}$.

b) Soit $k \geqslant N + 1$.
On a $S_p - S_k = \sum\limits_{i=k+1}^{p} Y_i$ donc $S_p - S_k$ est fonction de $Y_{k+1}, \ldots, Y_p$

De plus, $(S_k - S_N) = \left(\sum\limits_{i=N+1}^{k} Y_i \right)$ et

$$[T_N = k] = \left[\left| \sum_{i=N+1}^{k} Y_i \right| > \varepsilon \right] \bigcap \left(\bigcap_{p=N+1}^{k-1} \left[\left| \sum_{i=N+1}^{p} Y_i \right| \leqslant \varepsilon \right] \right)$$

donc $(S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}$ est fonction de $Y_{N+1}, \ldots, Y_k$
donc avec le lemme des coalitions on a $\boxed{\text{l'indépendance des variables } S_p - S_k \text{ et } (S_k - S_N)\mathbb{1}_{[T_N=k]}}$

c) Soit $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leqslant p$.
On a $E\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) = E\left((S_p - S_k + S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)$ donc

$$\begin{aligned} E\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) &= E\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) + 2E\left((S_p - S_k)(S_k - S_N)\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \\ &\quad + E\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \end{aligned}$$

donc en utilisant l'indépendance précédente et comme $E\left((S_p - S_k)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant 0$

$$E\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant 2E\left(S_p - S_k\right) E\left((S_k - S_N)\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) + E\left((S_k - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)$$

Or $E\left(S_p - S_k\right) = 0$ et d'où l'inégalité (avec 5(a)) : $\boxed{\varepsilon^2 P\left([T_N = k]\right) \leqslant E\left((S_p - S_N)^2 \mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)}$

d) D'après la question précédente, et par linéarité de l'espérance, on a :
$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} P\left([T_N = k]\right) \leqslant E\left((S_p - S_N)^2 \sum_{k=N+1}^{p} \left(\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right)\right)$
or par réunion disjointe $\sum_{k=N+1}^{p} \left(\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) = \mathbb{1}_{\bigcup_{k=N+1}^{p}[T_N=k]} \leqslant \mathbb{1}_{\Omega}$

donc, puisque $(S_p - S_N)^2$ est positive, $(S_p - S_N)^2 \sum_{k=N+1}^{p} \left(\mathbb{1}_{[T_N=k]}\right) \leqslant (S_p - S_N)^2$ ainsi, par croissance de l'espérance,

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} P\left([T_N = k]\right) \leqslant E\left((S_p - S_N)^2\right)$$

On conclut avec 3(b) : $\boxed{\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} P\left([T_N = k]\right) \leqslant \sum_{i=N+1}^{p} E\left(Y_i^2\right).}$

6. Les séries $\sum(P\left([T_N = k]\right))_{k>N}$ et $\sum(E\left(Y_m^2\right)_{k>N}$ étant à termes positifs, leurs suites de sommes partielles ont des limites dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (de fait, ces limites sont finies, mais ce n'est pas nécessaire dans ce raisonnement), et par passage aux limites dans les inégalités larges,

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} P\left([T_N = k]\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} E\left(Y_i^2\right).$$

Par réunion d'une famille dénombrable d'événements disjoints on a donc

$$P\left(\bigcup_{k>N} [T_N = k]\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} E\left(Y_i^2\right).$$

or $\bigcup_{k>N} [T_N = k] = [T_N > N, T_N \neq +\infty] = [T_N \in \mathbb{N}]$ et pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$T_N(\omega) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists p > N,\ |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]$$

ce qui prouve que $\boxed{P\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} E\left(Y_i^2\right)}$

Partie III - Le résultat

7. Soit $\omega \in \bigcup\limits_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]$

   On peut alors trouver $n_0 \geqslant N$ et $p_0 \geqslant N$ tels que $|S_{p_0}(\omega) - S_{n_0}(\omega)| > \varepsilon$
   Par l'absurde, si on avait $|S_{p_0}(\omega) - S_N(\omega)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $|S_N(\omega) - S_{n_0}(\omega)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
   on aurait $|S_{p_0}(\omega) - S_{n_0}(\omega)| \leqslant \varepsilon$ par inégalité triangulaire. Absurde
   donc $|S_{p_0}(\omega) - S_N(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}$ ou $|S_N(\omega) - S_{n_0}(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}$ ainsi $\omega \in \bigcup\limits_{p\geqslant N} \left[|S_p - S_N| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$

   or $\omega \notin \left[|S_N - S_N| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$ d'où $\omega \in \bigcup\limits_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$

   On vient de prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

   $$\boxed{\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right]}$$

8. On pose $Y_k = \dfrac{X_k}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

   Les Y_k sont bien des variables aléatoires discrètes car les X_k le sont, et elles sont indépendantes (pour toute partie I finie de $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(\lambda_k)_{k\in I}$ de réels, $P(\cap_{k\in I}[Y_k = \lambda_k]) = P(\cap_{k\in I}[X_k = k\lambda_k]) = \prod_{k\in I} P([X_k = k\lambda_k]) = \prod_{k\in I} P([Y_k = \lambda_k])$).
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_k admet un moment d'ordre 2 puisque Y_k^2 est presque sûrement constante (de valeur $\frac{1}{k^2}$, $E\left(Y_k^2\right) = \dfrac{1}{k^2}$, terme général d'une série convergente, et $E(Y_k) = \dfrac{E(X_k)}{k} = 0$

   On peut donc appliquer ce qui précède avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

   Soit $\varepsilon > 0$. D'après 2(b), il suffit alors d'établir que $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) = 0$

   Soit $N \in \mathbb{N}$. On a d'après 7, on a

   $$P\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) \leqslant P\left(\bigcup_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

   Par la question 6) :

   $$0 \leqslant P\left(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} E\left(Y_i^2\right)$$

   Or la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, d'où par le théorème d'encadrement,

   $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} [\,|S_n - S_p| > \varepsilon\,]\right)$ existe et vaut 0.

   Donc d'après 2(c), l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite des sommes partielles $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ converge est un évènement presque sûr.

donc presque sûrement, la série $\sum \frac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.