Exercice

Soit $n \geqslant 1$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ on note

$$A_p = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ \mathrm{rg}(M) \geqslant p\} \text{ et } B_p = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ \mathrm{rg}(M) \leqslant p\}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $M \in A_p$ si et seulement s'il existe deux parties I et J à p éléments de $[\![1, n]\!]$ telles que la sous-matrice $M_{I,J} = (m_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est inversible.

   $\Leftarrow$: Supposons qu'il existe un tel couple (I, J) de parties. Alors les colonnes de $M_{I,J}$ sont linéairement indépendantes. Les colonnes de M d'indices appartenant à J sont donc aussi linéairement indépendantes car l'application de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vers $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ qui à toute colonne $C = (c_i)_{\in[\![1,n]\!]}$ associe la colonne $(c_i)_{\in I}$ est linéaire (et car l'image d'une famille liée par une application linéaire est liée).

   Donc M est de rang au moins p.

   $\Rightarrow$: Supposons M de rang au moins p. Il existe alors une partie J à p éléments de $[\![1, n]\!]$ telle que les colonnes de M d'indices appartenant à J soient linéairement indépendantes.

   La sous-matrice $M_{[\![1,n]\!],J}$ est alors de rang p. Or le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes. Donc il existe une partie I à p éléments de $[\![1, n]\!]$ telle que les lignes de $M_{[\![1,n]\!],J}$ d'indices appartenant à I soient linéairement indépendantes. $M_{I,J}$ est alors inversible.

2. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

   Pour tout couple (I, J) de parties à p éléments de $[\![1, n]\!]$, notons

   $$f_{I,J} : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ni M \mapsto \det(M_{I,J}) \in \mathbb{C}$$

   Ces applications sont continues car polynomiales en les coefficients de la variable matricielle M ($f(M) = \sum_{\sigma\in S_p} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{p} m_{i_{\sigma(k)}, j_k}$ si $i_1, \ldots, i_p$ désignent les éléments de I rangés dans l'ordre croissant et $j_1, \ldots, j_p$ ceux de J)

   Comme $A_p = \cup_{I,J\subset[\![1,n]\!],\sharp I=\sharp J=p} f_{I,J}^{-1}(\mathbb{C}^*)$, et comme $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (son complémentaire est $\{0\}$, fermé), A_p est ouvert comme réunion d'une famille d'ouverts.

   Comme $A_p \supset GL_n(\mathbb{C})$, on a $\overline{A_p} \supset \overline{GL_n(\mathbb{C})} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Cette dernière égalité n'est pas vraiment au programme et doit savoir être redémontrée, par exemple ainsi : pour toute matrice M et tout $\delta > 0$, l'ensemble $[0, \delta[\setminus Sp(M)$ est non vide car infini comme complémentaire d'un ensemble fini dans un ensemble infini. Choisissant un élément λ dans ce complémentaire, $M - \lambda I_n$ est un élément inversible de la boule centrée en M et de rayon δ, au sens de la norme $M \mapsto \max_{i,j} |m_{i,j}|$. Ce qui prouve que M est point adhérent de $GL_n(\mathbb{C})$.

   L'inclusion réciproque étant évidente, $\overline{A_p} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

   1er cas : $p < n$

   Comme B_p est le complémentaire de A_{p+1} dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   De plus $\mathrm{Int}(B_p) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \overline{A_{p+1}} = \emptyset$.

   2nd cas $p = n$. Comme $B_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, B_n est fermé et son intérieur est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème

Partie I - Projection

Soit C une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

1. a) C'est une question de cours (distance à une partie non vide). Comme C n'est pas vide, $\{||x - y||,\ y \in C\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Donc $\boxed{\text{elle admet une borne inférieure.}}$

   b) Soit $m = \inf_C \delta$. Soit $c \in C$. Posons $R = \max(||c||, ||x|| + m)$. Alors $C \cap \bar{B}(0, R) \ni c$ donc $C \cap \bar{B}(0, R)$ n'est pas vide. De plus, par la seconde inégalité triangulaire, pour tout $y \in C \setminus \bar{B}(0, R)$ on a $\delta(y) \geqslant ||y|| - ||x|| > R - ||x|| \geqslant m$.
   Comme $\inf_C \delta = \min(\inf_{C\cap\bar{B}(0,R)} \delta, \inf_{C\setminus\bar{B}(0,R)} \delta)$ (avec la convention que le dernier "inf" vaut $+\infty$ si $C \setminus \bar{B}(0, R)$ est vide), on a

$$\boxed{\inf_{y\in C\cap\overline{B}(0,R)} \delta(y) = \inf_{y\in C} \delta(y)}$$

   c) $C \cap \overline{B}(0, R)$ est fermé comme intersection de fermés, et borné car $\overline{B}(0, R)$ est borné. Comme $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie, $C \cap \overline{B}(0, R)$ est compact, et non vide par construction.
   De plus δ est continue car 1-lipschitzienne. Par le théorème des bornes atteintes,
   $\boxed{\text{il existe } y_0 \in C \text{ tel que } \|x - y_0\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|.}$

   d) Soient u, v sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$.
   $||u+v||^2+||u-v||^2 = (u+v).(u+v)+(u-v).(u-v) = ||u||^2+2u.v+||v||^2+||u||^2-2u.v+||v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$. C'est l'identité du parallélogramme.
   Soient $y_0, y_1 \in C$ minimisant δ sur C et soient $u = \frac{y_0+y_1}{2} - x$ et $v = \frac{y_0-y_1}{2}$. Alors $u + v = y_0 - x$ et $u - v = y_1 - x$.
   Ainsi

$$m^2 + m^2 = 2\left\|\frac{y_0 + y_1}{2} - x\right\|^2 + \frac{1}{2}\|y_0 - y_1\|^2$$

   De plus $\frac{y_0+y_1}{2} \in C$ car C est convexe, donc $||\frac{y_0+y_1}{2} - x|| \geqslant m$.
   Ainsi $||y_0 - y_1||^2 \leqslant 2.0$ donc $\boxed{y_0 = y_1}$.

2. Si $x \in C$ alors δ est minimale sur C en x (où elle vaut 0) donc $\text{proj}_C(x) = x$.
   Si $x \notin C$ alors comme $\text{proj}_C(x)$ appartient à C, il est différent de x.
   Ainsi $\boxed{x = \text{proj}_C(x) \text{ si et seulement si } x \in C.}$

3. a) Soit $z \in C$. Soit $t \in [0, 1]$.
   $\text{proj}_C(x) + t(z - \text{proj}_C(x)) = (1 - t)\text{proj}_C(x) + tz \in C$.
   Donc $\boxed{\|x - \text{proj}_C(x)\|^2 \leqslant \|x - \text{proj}_C(x) - t(z - \text{proj}_C(x))\|^2.}$
   Ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant -2t(x - \text{proj}_C(x)) \cdot (z - \text{proj}_C(x)) + t^2||z - \text{proj}_C(x)||^2$.
   Divisant par t pour $t \in]0, 1]$, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité, et passant à la limite quand $t \to 0^+$, on en déduit que $\boxed{(x - \text{proj}_C(x)) \cdot (z - \text{proj}_C(x)) \leqslant 0.}$

   b) Réciproquement soit y est un élément de C tel que pour tout $z \in C$, $(x - y) \cdot (z - y) \leqslant 0$.
   Alors pour tout $z \in C$,

$$||x - z||^2 = ||(x - y) + (y - z)||^2 = ||x - y||^2 + ||y - z||^2 + 2(x - y).(y - z) \geqslant ||x - y||^2$$

   (on peut aussi dire que par la loi des sinus, le côté d'un triangle opposé au plus grand angle est le plus long, et que si un des angles est obtus, c'est le plus grand angle) et ainsi la restriction de δ à C est minimale en y, donc $\boxed{y = \text{proj}_C(x).}$

4. Notons $y_1 = \mathrm{proj}_C(x_1)$, idem pour x_2.

$$\begin{aligned}(y_1-y_2).(x_1-x_2) &= (y_1-y_2).\Big((x_1-y_1)+(y_1-y_2)+(y_2-x_2)\Big)\\ &= (y_1-y_2).(x_1-y_1)+||y_1-y_2||^2+(y_1-y_2).(y_2-x_2)\\ &\geqslant \boxed{0+||y_1-y_2||^2+0}\end{aligned}$$

par la propriété sur les angles obtus démontrée en 3)a).
On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$||y_1-y_2||^2 \leqslant ||y_1-y_2||.||x_1-x_2||$$

Lorsque $y_1 \neq y_2$, on obtient en divisant les deux membres par $||y_1-y_2||$, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité :

$$||y_1-y_2|| \leqslant ||x_1-x_2||$$

Cettte inégalité reste vraie si $y_1 = y_2$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{proj}_C \text{ est 1-lipschitzienne, donc continue.}}$

5. Dans cette question $d = 2$. Déterminer explicitement proj_C dans les cas suivants :

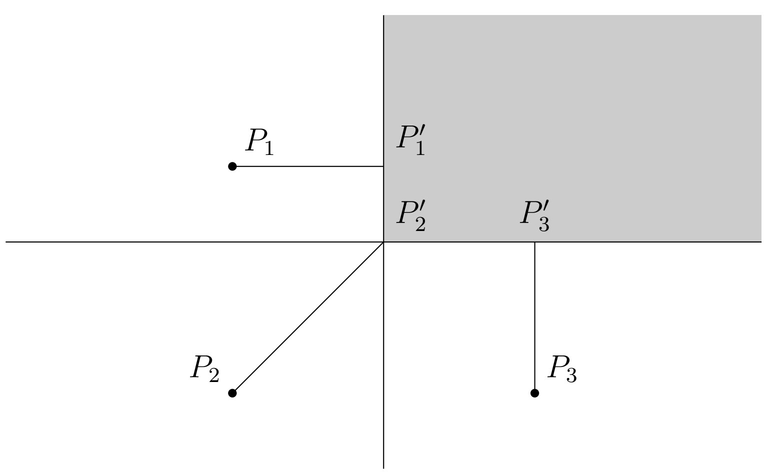
$$i)\, C = \mathbb{R}_+^2 \quad ; \quad ii)\, C = \left\{y \in \mathbb{R}^2 ; ||y|| \leqslant 1\right\} \quad ; \quad iii)\, C = \left\{y \in \mathbb{R}^2 ; \sum_{i=1}^{d} y_i \leqslant 1\right\}$$

(ces trois ensembles sont bien convexes et fermés)
Dans les trois cas, $\boxed{\text{tout point de } C \text{ est point fixe de } \mathrm{proj}_C.}$

a) Soit $y = (y_1, y_2) \notin C$.
$\boxed{\text{Si } y_1 < 0 \leqslant y_2 \text{ alors } \mathrm{proj}_C(y) = (0, y_2)}$ car pour tout $z = (z_1, z_2) \in C$,

$$||y-z||^2 = (y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2 \geqslant (y_1-z_1)^2 = (z_1-y_1)^2 \geqslant (-y_1)^2 = ||y-(0,y_2)||^2$$

car la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De même $\boxed{\text{si } y_2 < 0 \leqslant y_1 \text{ alors } \mathrm{proj}_C(y) = (y_1, 0)}$.
Enfin $\boxed{\text{si } y_1, y_2 \leqslant 0 \text{ alors } \mathrm{proj}_C(y) = (0, 0)}$ (même raisonnement).

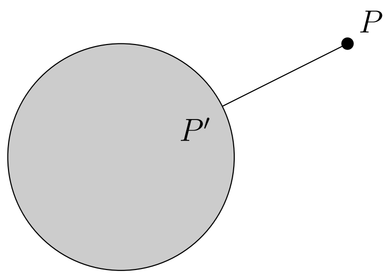


i) Soit $y \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Par la seconde inégalité triangulaire, on a

$$\forall z \in C \quad ||y - z|| \geqslant ||y - 0|| - ||z - 0|| \geqslant ||y|| - 1$$

Posons $z_0 = y/||y||$. Alors $||y - z_0|| = \Big| ||y|| - 1 \Big| ||z_0|| = ||y|| - 1$.

Donc $\boxed{\text{proj}_C(y) = z_0 = \frac{y}{||y||}.}$



b) Soit $y \in \mathbb{R}^2 \setminus C$.

Notons z le projeté orthogonal de y sur la droite **affine** $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ z_1 + z_2 = 1\}$. Ce projeté est défini par

$$z \in D \quad \text{et} \quad z - y \perp \vec{D}$$

où $\vec{D}$ est la direction de D ; c'est la droite vectorielle d'équation $z_1 + z_2 = 0$ et c'est aussi l'orthogonal de $Vect(n)$ où $n = (1, 1)$.

Par conséquent $z - y \in Vect(n)^{\perp\perp} = Vect(n)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z - y = \lambda(1, 1)$.

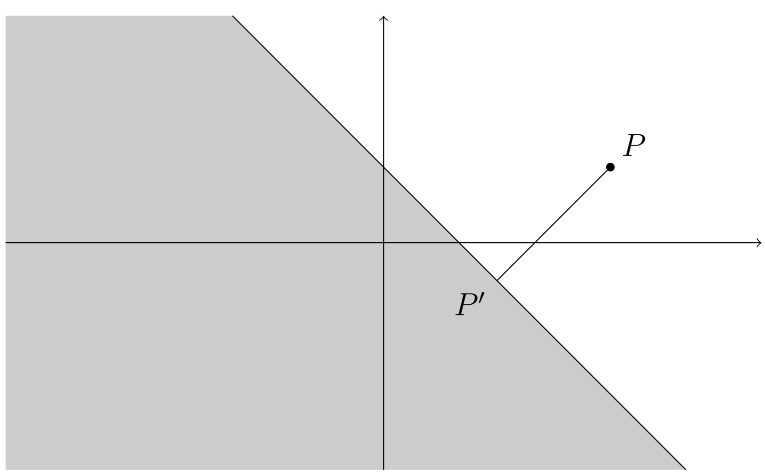
Comme $z \in D$, on a : $1 = z_1 + z_2 = y_1 + \lambda + y_2 + \lambda$ et ainsi $\lambda = \frac{1 - y_1 - y_2}{2}$.

Pour tout $z' \in C$, on a :

$$(z' - z).(y - z) = (z'_1 - z_1)\lambda + (z'_2 - z_2)\lambda = \lambda\Big((z'_1 + z'_2 - 1) - (z_1 + z_2 - 1)\Big) = \lambda\Big((z'_1 + z'_2 - 1) - 0\Big) \leqslant 0$$

car $\lambda < 0$ (car $y \notin C$)

Ainsi par 3)b), $\boxed{\text{le projeté de } y \text{ sur } C \text{ est } z = y + \frac{1 - y_1 - y_2}{2}(1, 1).}$



Partie II - Séparation

6. a) Soient $e, e' \in C - D$. Il existe alors $c, c' \in C$ et $d, d' \in D$ tels que $e = c - d$ et $e' = c' - d'$.
Soit $\lambda \in [0,1]$.

$$(1-\lambda)e + \lambda e' = \Big((1-\lambda)c + \lambda c'\Big) - \Big((1-\lambda)d + \lambda d'\Big) \in C - D$$

Donc $\boxed{C - D \text{ est convexe}}$. De plus il $\boxed{\text{ne contient pas } 0}$ car C et D sont disjoints.

b) Soit (e_n) une suite à termes dans $C - D$ convergeant vers une limite ϵ.
Par axiome du choix, il existe des suites $(c_n) \in C^{\mathbb{N}}$ et $(d_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n = c_n - d_n$$

.
Comme D est compacte, il existe une extractrice φ et un élément δ de D tels que $(d_{\varphi(k)})$ converge vers δ.
Alors $(c_{\varphi(k)}) = (e_{\varphi(k)}) + (d_{\varphi(k)})$ converge vers $\gamma = \epsilon + \delta$. Comme C est fermé, on a $\gamma \in C$ et comme $\epsilon = \gamma - \delta$, on a $\epsilon \in C - D$.
Ainsi $\boxed{C - D \text{ est fermé.}}$

c) Notons $\boxed{p \text{ le projeté du } 0 \text{ de } \mathbb{R}^d \text{ sur } C - D}$. Par la propriété des angles obtus démontrée en 3)a), on a $\forall z \in C - D \quad (0-p).(z-p) \leqslant 0$.
Ainsi $\forall (x,y) \in C \times D \quad p.(x-y-p) \geqslant 0$ et donc $\boxed{p.y \leqslant p.x - \epsilon}$ avec $\boxed{\epsilon = ||p||^2 > 0}$ car $p \neq 0$ car $0 \notin C - D$. Noter que ϵ est indépendant de x et de y.

7. a) Montrons que $C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d, p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)\right\}$.
$\boxed{\text{L'inclusion de gauche à droite est évidente}}$ (la borne supérieure d'un ensemble majore cet ensemble).
Montrons $\boxed{\text{l'inclusion réciproque par contraposée}}$. Soit $d \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Posons $D = \{d\}$. C'est un compact de $\mathbb{R}^d$ (la suite constante de valeur d a une valeur d'adhérence dans $\{d\}$).
D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in C \times \{d\} \quad p.y \leqslant p.x - \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in C \quad p.d \leqslant p.x - \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in C \quad (-p).d \geqslant (-p).x + \epsilon$$

Ainsi $(-p).d - \epsilon$ est un majorant de $\{(-p).x,\ x \in C\}$ donc $(-p).d - \epsilon \geqslant \sigma_C(-p)$ et par conséquent $(-p).d > \sigma_C(-p)$.
Interprétation géométrique : p est alors non nul et choisissant h tel que $(-p).d > h > \sigma_C(-p)$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{R}^d,\ \ (-p).z = h\}$ est un hyperplan affine qui **sépare** x de C en ce sens que x est dans l'un des demi-espaces ouverts délimités par cet hyperplan et C est inclus dans l'autre demi-espace ouvert.
On a donc $d \notin \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d, p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)\right\}$. cqfd.

b) Soient $x \in \mathbb{R}^d$.

Si $p.x \leqslant \sigma_C(p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, alors cette inégalité reste vraie pour tout $p \in S(0,1)$.

Réciproquement, si cette inégalité est vraie pour tout $p \in S(0,1)$ alors pour tout élément q non nul de $\mathbb{R}^d$, posant $p = q/||q||$ on a

$$\sigma_C(q) = \sup_{y \in C} ||q||p.y = ||q||\sigma_C(p) \geqslant ||q||p.x = q.x$$

et l'inégalité reste vraie pour $p = 0$ (car elle s'écrit $0 \geqslant 0$).

Donc $\boxed{C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in S(0,1), p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)\right\}}$.

8. L'adhérence $\bar{A}$ de A est fermée. Vérifions qu'elle est aussi convexe. Soient $a, b \in \bar{A}$. Il existe alors des suites (a_n) et (b_n) à termes dans A convergeant respectivement vers a et b. Soit $\lambda \in [0,1]$. Par linéarité de la limite,

$$(1-\lambda)a + \lambda b = \lim_{n \to \infty} ((1-\lambda)a_n + \lambda b_n)$$

Or par convexité de A, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1-\lambda)a_n + \lambda b_n \in A$. Donc $(1-\lambda)a + \lambda b \in \bar{A}$.

Par la question précédente, on a $\bar{A} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in S(0,1)\ p.y \leqslant \sigma_{\bar{A}}(p)\}$.

Par hypothèse, $x \notin \mathring{A}$. Selon l'énoncé, on peut alors admettre que $x \notin \mathring{\bar{A}}$. Nous développerons ce point à la fin de ce corrigé.

Comme $x \notin \mathring{\bar{A}}$, toute boule (de rayon non nul) centrée en x rencontre $\mathbb{R}^d \setminus \bar{A}$.

Il existe donc (par axiome du choix) une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \setminus \bar{A}$.

On a alors par axiome du choix et par la question précédente l'existence d'une suite (p_n) à termes dans $S(0,1)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n.x_n > \sigma_{\bar{A}}(p_n)$.

Or $S(0,1)$ est fermée et bornée, donc compacte car $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie. Il existe donc une extractrice φ telle que $(p_{\varphi(k)})$ converge vers une limite $p \in S(0,1)$. Ainsi $\boxed{p \neq 0}$.

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*\ p_{\varphi(k)}.x_{\varphi(k)} > \sigma_{\bar{A}}(p_{\varphi(k)})$.

Soit $y \in A$. Alors $y \in \bar{A}$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*\ p_{\varphi(k)}.x_{\varphi(k)} > p_{\varphi(k)}.y$.

Enfin (x_n) converge vers x car par construction $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ||x_n - x|| < \frac{1}{n}$ donc par encadrement $(||x_n - x||)$ converge vers 0. Par conséquent $(x_{\varphi(k)})$ converge vers x.

Par continuité du produit scalaire et par passage aux limites dans les inégalités larges, on a donc : $\boxed{p.x \geqslant p.y}$.

Interprétation géométrique : l'hyperplan affine $\{z \in \mathbb{R}^d, \quad p.(x-z) = 0\}$ est un hyperplan passant par x et C est contenu dans un des demi-espaces fermés délimité par cet hyperplan.

Revenons sur l'implication $x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \notin \mathring{\bar{A}}$, que nous démontrons par contraposée.

1er cas : supposons que $\mathring{A}$ n'est pas vide.

Soit $a \in \mathring{A}$ et $b \in \bar{A}$. Montrons qu'alors $[a, b[\subset \mathring{A}$ (lemme d'intériorité).

Comme a est intérieur à A, il existe $r > 0$ tel que $A \supset B(a, r)$.

Soit $c \in [a, b[$. Il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que $c = (1-\lambda)a + \lambda b$. Comme b est adhérent à A, il existe $b' \in A \cap B(b, \frac{(1-\lambda)r}{\lambda})$ (avec la convention que si $\lambda = 0$ alors $B(b, \frac{r}{\lambda}) = \mathbb{R}^d$). Posons alors $U = (1-\lambda)B(a,r) + \lambda b'$. Par convexité de A, $U \subset A$. De plus U est ouvert comme image réciproque de $B(a,r)$ par l'application $u \mapsto \frac{u - \lambda b'}{1-\lambda}$ qui est continue. Enfin

$$c = (1-\lambda)a + \lambda b = (1-\lambda)(a + \frac{\lambda}{1-\lambda}(b - b')) + \lambda b' \in U$$

car $\left\|\frac{\lambda}{1-\lambda}(b-b')\right\| < r$ donc $a+\frac{\lambda}{1-\lambda}(b-b') \in B(a,r)$.

Ainsi U est un voisinage de c, donc A est un voisinage de c, donc $c \in \mathring{A}$.

Soit alors $b \in \mathring{\bar{A}}$. Pour c suffisamment proche de b, c appartient à $\bar{A}$. On peut choisir un c situé sur la droite (ab) et du côté opposé à a par rapport à b. Par le lemme d'intériorité $\mathring{A}$ contient $[ac[$ donc contient b.

2nd cas : $\mathring{A}$ est vide.

Alors $d+1$ points quelconques $M_0, \ldots, M_d$ de A sont toujours "co-hyperplanaires" (affinement liés) car sinon l'application $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto M_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{M_0M_i}$ induirait une bijection bicontinue Φ de $U = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in (\mathbb{R}_+^*)^d,\ \sum_{i=1}^d \lambda_i < 1\}$ vers une partie V de A, et comme U est non vide et ouvert (car $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \mapsto \sum_{i=1}^d \lambda_i$ est continue), $V = (\Phi^{-1})^{-1}(U)$ serait un ouvert non vide inclus dans A, donc $\mathring{A}$ serait non vide.

Ainsi choisissant $M_0 \in A$ quelconque et $M_1, \ldots, M_r \in A$ tels que $(\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_r})$ soit libre avec r maximal pour cette propriété (un tel r existe comme maximum d'une partie de $\mathbb{N}$ majorée par d et non vide car contenant 0), on a $r < d$ et $A \subset F = M_0 + Vect(\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_r})$.

F est alors un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^d$, donc d'intérieur vide (cf exercice [0662] 33 p. 25)

De plus F est fermé (tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie donc fermé, donc tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ est aussi fermé comme image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une translation, 1-lipschitzienne donc continue). Donc $\bar{A} \subset F$. Donc $\bar{A}$ est d'intérieur vide.