Exercice

Soit $n \geqslant 1$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$ on note

$$A_p = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ , \ \mathrm{rg}(M) \geqslant p\} \text{ et } B_p = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ , \ \mathrm{rg}(M) \leqslant p\}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in A_p$ si et seulement s'il existe deux parties I et J à p éléments de $[\![1, n]\!]$ telles que la sous-matrice $M_{I,J} = (m_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est inversible.
2. Soit $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que A_p est un ouvert de E. Quelle est l'adhérence de A_p ?
3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que B_p est un fermé de E. Quelle est l'intérieur de B_p ?

Problème

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, nous noterons :
- $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x et y.

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

- $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, la norme euclidienne usuelle de x,
- $[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\}$ le segment joignant x à y.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$A + B = \{a + b, \ a \in A, \ b \in B\}, \ \lambda A = \{\lambda a, \ a \in A\}, A - B = A + (-1)B$$

Partie I - Projection

Soit C une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On cherche à montrer qu'il existe un unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|$$

1. a) Justifier que $\{\|x - y\| \ , \ y \in C\}$ admet une borne inférieure.
   b) On considère la fonction δ définie sur C par $\delta : y \mapsto \|x - y\|$. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   $$C \cap \overline{B}(0, R) \neq \emptyset \quad \text{ et } \inf_{y\in C\cap\overline{B}(0,R)} \delta(y) = \inf_{y\in C} \delta(y)$$
   c) En déduire qu'il existe $y_0 \in C$ tel que $\|x - y_0\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|$.
   d) Monter que si u, v sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$, $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$.
   En déduire l'unicité de l'élément $y_0 \in C$ tel que $\|x - y_0\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|$.
   On pourra considérer le milieu de deux éléments y_0 et y_1 minimisant δ sur C.

On appelle alors projection de x sur C et on note $\mathrm{proj}_C(x)$ l'unique élément ainsi défini.

2. Montrer que $x = \mathrm{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

3. a) Soit $z \in C$. Soit $t \in [0,1]$, justifier que $\|x - \mathrm{proj}_C(x)\|^2 \leqslant \|x - \mathrm{proj}_C(x) - t(z - \mathrm{proj}_C(x))\|^2$. En déduire que $(x - \mathrm{proj}_C(x)) \cdot (z - \mathrm{proj}_C(x)) \leqslant 0$.

   b) Réciproquement montrer que si y est un élément de C tel que pour tout $z \in C$, $(x-y)\cdot(z-y) \leqslant 0$ alors $y = \mathrm{proj}_C(x)$.

4. Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$(\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geqslant \|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\|^2$$

   En déduire que proj_C est continue.

5. Dans cette question $d = 2$. Déterminer explicitement proj_C dans les cas suivants :

$$i)\, C = \mathbb{R}_+^2 \quad ; \quad ii)\, C = \left\{y \in \mathbb{R}^2; \|y\| \leqslant 1\right\} \quad ; \quad iii)\, C = \left\{y \in \mathbb{R}^2; \sum_{i=1}^{d} y_i \leqslant 1\right\}$$

   On pourra s'inspirer de dessins.

Partie II - Séparation

6. Soit C et D deux parties convexes non vides de $\mathbb{R}^d$. On suppose que C est fermée, que D est compacte et que $C \cap D = \emptyset$.

   a) Montrer que $C - D$ est une partie convexe $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0.

   b) Montrer que $C - D$ est fermée. *On pourra utiliser la caractérisation séquentielle.*

   c) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in C \times D$, $p \cdot y \leqslant p \cdot x - \varepsilon$.
   On pourra utiliser les résultats de la partie I.

7. Soit C une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit $\sigma_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\sigma_C(p) = \sup\{p \cdot x,\ x \in C\}$$

   a) Montrer que $C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d, p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)\right\}$.
   Pour l'inclusion de droite à gauche on pourra raisonner par contraposée et utiliser la question 6.

   b) En déduire que $C = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in S(0,1), p \cdot x \leqslant \sigma_C(p)\right\}$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

8. Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que pour tout $y \in A$, $p.x \geqslant p.y$.

   On pourra admettre que dans ce cas, $x \notin \overline{\mathring{A}}$.

   Cette question demande des prises d'initiative.